



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI VERONA  
DIPARTIMENTO DI  
FILOSOFIA, PEDAGOGIA E PSICOLOGIA  
SCUOLA DI DOTTORATO DI  
SCIENZE UMANE E FILOSOFIA  
DOTTORATO DI RICERCA IN  
PSICOLOGIA DELLE ORGANIZZAZIONI:  
PROCESSI DI DIFFERENZIAZIONE E DI INTEGRAZIONE

Con il contributo di  
"BORSA SISS VENETO"

XXV CICLO/ 2010

## **L'EURISTICA DEI CONTRARI NEL PROBLEM SOLVING GEOMETRICO**

S. S. D. M-PSI/01

Coordinatore: Prof. ssa Margherita Pasini

Tutor: Prof. Ugo Savardi

Dottoranda: Dott. ssa Erika Branchini



## **RINGRAZIAMENTI**

Giunta al termine di questo percorso, ritengo sia necessario ringraziare le persone che mi hanno aiutato e supportato durante questo periodo. Un primo ringraziamento va al mio tutor, il prof. Ugo Savardi, per avermi guidato e sostenuto durante la realizzazione di questo progetto. I ringraziamenti vengono estesi anche alla prof. ssa Ivana Bianchi e il prof. Roberto Burro che, grazie alle loro competenze, hanno contribuito alle discussioni riguardanti le varie fasi di cui il progetto si compone agevolandone il compimento.

Desidero inoltre ringraziare il prof. Günther Knoblich, professore di scienze cognitive presso il “Central European University” di Budapest, che mi ha permesso di svolgere un proficuo periodo di sei mesi all’estero attraverso il quale ho avuto la possibilità di confrontarmi con una realtà diversa rispetto al contesto di ricerca fino ad allora conosciuto.

Ringrazio anche i vari coordinatori di dottorato, la prof. ssa Adalgisa Battistelli, il prof. Massimo Bellotto e la prof. ssa Margherita Pasini, che nel corso di questo triennio si sono avvicinati.

Un ringraziamento particolare va agli studenti che hanno partecipato alla fase sperimentale e vorrei ringraziare la prof. ssa Paola Bruschi, dirigente scolastica dell’istituto “A. Manzoni” di Suzzara, e la sua collaboratrice, la prof. ssa Lorenza Ferrari, che mi hanno dato la possibilità di svolgere una parte dell’esperimento a scuola.

Ringrazio la mia famiglia che mi ha sostenuto e continua a sostenermi nelle mie scelte.

Ringrazio Francesco che mi ha appoggiato e aiutato durante quest’esperienza e la sua famiglia.

Ringrazio, infine, i miei colleghi di dottorato del XXV ciclo che hanno reso maggiormente piacevole quest’esperienza; tra gli altri colleghi di dottorato ringrazio Barbara, Anna, Marco, Silvia.

Infine, tra i colleghi che ormai hanno già conseguito il titolo di dottora di ricerca vorrei ringraziare Beatrice, Raffaele e Margherita.



## INDICE

|   |     |
|---|-----|
| INTRODUZIONE .....  | 8   |
| <b>CAPITOLO PRIMO</b>   |     |
| I PROCESSI DI RAGIONAMENTO COINVOLTI NELLA SOLUZIONE DI PROBLEMI.....           | 13  |
| 1.1 Il ragionamento implica il problem solving?.....                            | 13  |
| 1.2 Il ragionamento matematico. ....  | 30  |
| 1.3 L'importanza della percezione nel pensiero produttivo. ....                 | 34  |
| 1.4 La visualizzazione in geometria. ....                                       | 38  |
| 1.5 L'importanza della rappresentazione nell'insight problem solving. ....      | 42  |
| 1.6 L'importanza dei processi percettivo- figurali nel ragionamento logico..... | 46  |
| <b>CAPITOLO SECONDO</b>   |     |
| GLI ERRORI DEL RAGIONAMENTO .....   | 51  |
| 2.1 Le fallacie del ragionamento logico .....                                   | 51  |
| 2.2 Gli errori del pensiero visivo. ....  | 57  |
| <b>CAPITOLO TERZO</b>   |     |
| IL RUOLO DEI CONTRARI NEI PROCESSI DI RAGIONAMENTO.....                         | 61  |
| 3.1 I contrari nel ragionamento logico.....                                     | 64  |
| 3.2 La contrarietà come relazione percettiva.....                               | 68  |
| 3.3 La contrarietà in geometria.....  | 73  |
| <b>CAPITOLO QUARTO</b>  |     |
| LA PARTE SPERIMENTALE .....   | 83  |
| 4.1 Il disegno sperimentale e le sue componenti. ....                           | 83  |
| 4.1.1 La metodologia interosservativa.....                                      | 85  |
| 4.1.2 La contrarietà nella soluzione dei problemi presentati. ....              | 88  |
| 4.2 Descrizione delle variabili utilizzate. ....                                | 100 |
| 4.3 I risultati.....  | 105 |
| 4.4 Conclusioni.....  | 135 |
| Bibliografia.....   | 138 |
| Appendice.....  | 167 |

## **Abstract**

Le ricerche contemporanee, che si sono occupate di problem solving inteso come uno specifico processo di ragionamento che interviene nella soluzione di compiti costituiti da premesse e conclusione, hanno preso in esame la dimensione cognitiva di tale processo (per una revisione Mercier & Sperber, 2011), trascurando l'importanza, già sottolineata dalla psicologia della Gestalt (Wertheimer, 1919/1945; Duncker, 1935, 1945) e dagli studi contemporanei riguardanti l'apprendimento geometrico (Duval, 1995, 1999, 2006; Gorgorio, 1999; Gray, 1999, Gutierrez, 1996a, 1996b) e l'insight nel problem solving (Knoblich, Ohlsson, Haider, & Rhenius, 1999; Öllinger, Jones, Knoblich, 2006; Öllinger, Jones, Knoblich, 2008), dei processi percettivi. La ricerca condotta intende, quindi, indagare il ruolo degli aspetti percettivi del problema nel problem solving geometrico focalizzando l'attenzione sul modo in cui l'attenzione e la manipolazione dei contrari spaziali modifichino il processo di soluzione.

Lo studio condotto ha coinvolto 240 studenti suddivisi in 80 gruppi di interosservazione, di tre componenti ciascuno (Bozzi, 1978), a cui veniva chiesto di risolvere sei problemi geometrici. Il disegno sperimentale si componeva di quattro condizioni: a) una condizione in cui ai partecipanti veniva chiesto di leggere il testo del problema e di risolverlo (condizione di baseline); b) un'altra in cui ai partecipanti si chiedeva di trovare tutte le caratteristiche spaziali presenti nel problema prima di impegnarsi nel processo di soluzione; c) in un'altra condizione, ai partecipanti veniva chiesto di trovare i contrari spaziali presenti nel problema prima di risolverlo e veniva suggerito che questo costituiva un aiuto per la soluzione; d) nell'ultima condizione, ai partecipanti si chiedeva di utilizzare tutte le nozioni acquisite in passato per risolvere i problemi.

Le analisi condotte prendendo in esame il tempo di soluzione, la tipologia delle soluzioni date ai problemi presentati e il processo di soluzione hanno dimostrato che un'euristica basata sui contrari influenza il processo di soluzione, riducendo il tempo di soluzione così come il suggerimento di utilizzare le nozioni acquisite in passato, aumentando il numero di soluzioni percettive e influenzando le strategie messe in atto per risolvere i problemi.

## **Abstract**

Contemporary researches, that have dealt with problem solving as a process of reasoning, have focused on many cognitive aspects of this process (for a review, see Mercier & Sperber, 2011) disregarding the importance of perceptual processes, already emphasized by Gestalt psychology and by contemporary studies about learning geometry and studies about insight in problem solving. The research carried out aims to investigate the role of perceptual aspects of a problem in a geometrical problem solving focusing on how the attention and the manipulation of spatial contraries modify the process of solution.

The study was carried out with 240 students (96 undergraduates and 144 high school students) subdivided in 80 inter-observational groups (Bozzi, 1978). Participants were asked to solve six classic spatial-geometrical problems. Four conditions were studied: a) a control condition where no specific suggestions were provided (baseline condition), b) a condition where participants were asked to search spatial contraries related to the problem before embarking on the process of solution; c) a condition where participants were asked to search spatial contraries before embarking on the process of solution and they were informed that contraries could help the solution process; d) a condition where participants were invited to use all prior acquired notions to solve the problems.

The analyses of the solution time, the typology of solutions provided and the solution process have demonstrated that using a heuristics based on contraries affects the process of solution: it reduces the solution time as well as the suggestion to use their prior notions to find a solution does, it increases the number of perceptual solutions, and influences the strategies used in the solution process.

## INTRODUZIONE

Gran parte delle situazioni con cui l'uomo si deve confrontare nei vari contesti di vita si configurano come problemi a cui è necessario far fronte e a cui si deve fornire una risposta. Solitamente l'abilità di destreggiarsi in questi casi dipende in larga misura dalle modalità di organizzare le conoscenze acquisite in passato e di processare e gestire le informazioni in entrata. Per questo motivo la presente ricerca mira ad indagare l'influenza di una precisa modalità di organizzare la conoscenza, ossia l'articolazione delle informazioni percettive attorno a polarità contrarie, sul processo coinvolto nella soluzione di problemi.

In primo luogo verrà preso in esame il legame esistente tra il ragionamento e il problem solving partendo dall'analisi della bibliografia contemporanea. Vi sono, infatti, molte ricerche contemporanee che si occupano di ragionamento mettendone in evidenza diversi aspetti, quali il coinvolgimento di diverse abilità cognitive come l'intelligenza (Burns, Nettlebeck, McPherson, 2009), l'intelletto (DeYoung, Braver, Shamosh, Green, Gray, 2009), l'attenzione (Unsworth, Spillers, Brewer, 2010) e la memoria di lavoro (Unsworth, Engle, 2007a; Unsworth, Spillers, Brewer, 2010), la connessione del ragionamento con le credenze (Evans, Barston, Pollard, 1983; Evans, Handley, Bacon, 2009) e l'esistenza e il funzionamento di due diversi sistemi di ragionamento (Evans, 2007, 2008; Evans & Over, 1996; Kahneman & Frederick, 2002; Kahneman, 2003; Sloman, 1996; Stanovich, 1999). Di fatto, però, gli studi contemporanei si occupano di uno specifico processo di ragionamento, ossia di quel processo che interviene nella soluzione di compiti in cui a partire da determinate premesse si deve arrivare ad una conclusione (Mercier & Sperber, 2011). I compiti aventi questa struttura sono stati definiti problemi (Sternberg, 1987) e il processo in essi coinvolto viene identificato come problem solving (Anolli, Antonietti, Crisafulli, Cantoia, 2001; Antonietti, 2001; Byrne, Johnson Laird, 1989; Gick & Holyoack, 1980; Guilford, 1968, 1971; Johnson Laird, 1994; Newell, Shaw, Simon, 1958; Newell & Simon, 1972; Sternberg, 1987; Van de Geer, 1957; Wason, Evans, 1975; Wason, Johnson Laird, 1997); pertanto i recenti studi che



condividono la definizione di ragionamento sopra esposta prendono in esame il processo implicato nella soluzione di problemi. Con questa consapevolezza verranno presentate le ricerche contemporanee che mettono in evidenza l'esistenza di differenti abilità di ragionamento/ problem solving legate alle diverse tipologie di compiti esistenti. Il focus di attenzione in questi studi è principalmente rivolto ad investigare la dimensione cognitiva di tale processo trascurando il ruolo delle componenti percettive.

Queste ultime, al contrario, sono al centro delle ricerche contemporanee riguardanti l'apprendimento geometrico, in cui viene sottolineata l'importanza delle abilità di processare e manipolare gli aspetti figurali legati alle figure geometriche ed allo spazio (Duval, 1995, 1999, 2006; Gorgorio, 1999; Gray, 1999, Gutierrez, 1996a, 1996b). La percezione risulta essere un elemento chiave nei processi di pensiero coinvolti nella soluzione di problemi: nel pensiero produttivo (Wertheimer, 1919/1945; Duncker 1935, 1945), dove l'attenzione alla struttura fenomenico percettiva del problema è fondamentale nella riorganizzazione degli elementi problematici al fine di risolvere correttamente il problema, e nei fenomeni di insight (Knoblich, Ohlsson, Haider, & Rhenius, 1999; Öllinger, Jones, Knoblich, 2006, 2008), dove la soluzione consiste nel cambiare l'iniziale rappresentazione della situazione problematica. Le due tipologie di ragionamento individuate, ragionamento logico da una parte e pensiero visivo dall'altra, sembrano essere in antitesi; in realtà esse risultano essere correlate, in quanto la manipolazione di aspetti figurali attraverso l'utilizzo di immagini mentali e quindi l'intervento del pensiero agevola la ricerca della soluzione in problemi logici (Antonietti, 1994, 2001; Vallee-Tourangeau, Pyton, 2008; Weller, Villejoubert, & Vallee-Tourangeau, 2011). Un altro aspetto comune a questi due processi è dato dalla loro fallacia. Essi infatti non sono processi lineari ma fallibili d'errore; verranno pertanto analizzate le differenti tipologie di errore che caratterizzano il ragionamento logico e il ragionamento percettivo. Il capitolo successivo si concentrerà sul modo in cui è possibile correggere i "difetti" del ragionamento logico: l'introduzione della contrarietà. Secondo la teoria dei modelli mentali (Evans, Handley, Harper, Johnson-Laird, 1999; Johnson-Laird, 1983; Johnson-Laird, &

Byrne, 1991), la soluzione corretta di un sillogismo si basa sulla creazione di contro- esempi rispetto ad una prima conclusione a partire dalle premesse date; solamente nel momento in cui il solutore ha vagliato le possibilità della non esistenza di contro- esempi, l'iniziale conclusione può essere considerata la soluzione definitiva. La contrarietà è centrale anche nella verifica di ipotesi (hypothesis testing performance): fornire un esempio contrario rispetto alla soluzione corretta ne facilita il raggiungimento (Gale & Ball, 2003, 2006, 2009, 2012). Lo stesso funzionamento del ragionamento è intrinsecamente connesso con la contrarietà. Secondo Mercier e Sperber (2011) la funzione evolutiva del ragionamento è connaturata nella comunicazione umana, in quanto il ragionamento viene concepito come uno strumento in grado di produrre e valutare gli argomenti destinati alla persuasione, rendendo possibile ed efficace la comunicazione umana. Affinché questo sia possibile e per evitare di cadere vittima di informazioni distorte, il ragionamento fonda il proprio funzionamento sul meccanismo di vigilanza epistemica (Mercier, Sperber, 2011; Sperber, Clément, Heintz, Mascaro, Mercier, Origgi, & Wilson, 2010) che consente di verificare la veridicità o meno dell'informazione ricevuta valutando l'affidabilità/inaffidabilità dell'interlocutore e la coerenza/incoerenza della nuova informazione rispetto al sistema di conoscenze e credenze del destinatario della comunicazione. Data la pervasività della contrarietà nel ragionamento e nei processi di soluzione di problemi logici, è possibile supporre l'esistenza di un meccanismo fondato sulla contrarietà percettiva alla base del problem solving percettivo- geometrico. Verrà, quindi, presa in esame la contrarietà, definita come relazione percettiva alla base dell'organizzazione dell'esperienza fenomenica di spazio e dotata di una propria struttura di principi (Bianchi & Savardi, 2008; Savardi, 2009) e la possibilità di ipotizzare una relazione di questo tipo alla base dei cambiamenti coinvolti nel processo di soluzione di problemi spazio- geometrici.

Vengono pertanto analizzate le trasformazioni geometriche coinvolte nella soluzione dei sei problemi spazio-geometrici utilizzati poi per lo studio condotto, sottolineando il legame di contrarietà tra la situazione iniziale e le variazioni richieste dal processo di soluzione.

La connessione tra i contrari e la soluzione di problemi ad alto contenuto percettivo costituisce il punto di partenza del disegno sperimentale volto ad indagare come l'attenzione e la manipolazione di variabili spaziali contrarie modifichi il processo di soluzione di problemi spazio-geometrici.

L'indagine condotta consiste in un compito di interosservazione (Bozzi, 1978) in cui i partecipanti, divisi in gruppi di tre persone ciascuno, sono stati invitati a risolvere sei problemi appartenenti alla tradizione gestaltista. L'esperimento si compone di quattro condizioni: a) una condizione di baseline in cui ai partecipanti si è chiesto di leggere il testo dei problemi e di risolverli; b) in un'altra i gruppi sono stati invitati a cercare tutti i contrari spaziali presenti nel problema prima di impegnarsi nella ricerca di una soluzione (condizione dei contrari impliciti); c) in questa condizione agli studenti è stato richiesto, prima di risolvere il problema, di cercare i contrari spaziali presenti nel problema con la consapevolezza che questi ultimi sarebbero stati di aiuto per la fase successiva (condizione dei contrari espliciti); d) nell'ultima condizione i partecipanti sono stati invitati ad utilizzare tutte le competenze, regole e nozioni acquisite in passato e ritenute necessarie per la soluzione di problemi (condizione nozionistica). Al fine di rispondere all'ipotesi sottostante all'impianto sperimentale relativa al modo in cui i contrari influenzano il processo di soluzione dei problemi sono state prese in esame diverse variabili, quali il tempo di soluzione, le emozioni, il processo di soluzione e la tipologia delle soluzioni, attraverso le quali sono stati analizzati i dati ottenuti.

Infine, verranno commentati i risultati ottenuti sottolineando le potenzialità della ricerca.



## **CAPITOLO PRIMO**

### **I PROCESSI DI RAGIONAMENTO COINVOLTI NELLA SOLUZIONE DI PROBLEMI**

Il problem solving, inteso come processo di pensiero attivato dagli esseri umani nel momento in cui si trovano ad affrontare situazioni problematiche (Anolli, Antonietti, Crisafulli, Cantoia, 2001; Antonietti, 2001; Byrne, Johnson Laird, 1989; Gick & Holyoack, 1980; Guilford, 1968, 1971; Johnson Laird, 1994; Newell, Shaw, Simon, 1958; Newell & Simon, 1972; Sternberg, 1987; Van de Geer, 1957; Wason, Evans, 1975; Wason, Johnson Laird, 1997), coincide di fatto con il ragionamento oppure è incluso in esso?

A partire dall'analisi delle ricerche contemporanee che si occupano di ragionamento, si cercherà di mettere in luce il legame esistente tra questi due processi delineandone il funzionamento, l'eventuale coinvolgimento di altre abilità cognitive e di fornire un quadro esauriente rispetto al modo in cui ragionamento e problem solving vengono descritti all'interno delle Scienze cognitive.

#### **1.1 Il ragionamento implica il problem solving?**

Il ragionamento è un'abilità tipicamente umana ed è coinvolto in molte attività, alcune delle quali si configurano come situazioni caratterizzate da un obiettivo da raggiungere e dalla mancata conoscenza, da parte dell'essere umano, sul modo, sui mezzi e sulle azioni da compiere al fine del suo raggiungimento (Duncker, 1969; Kanizsa, 1973; Newell & Simon, 1972). Tali situazioni sono state definite "problema" e il processo di ragionamento in esse coinvolto viene identificato con il termine problem solving (Anolli, Antonietti, Crisafulli, Cantoia, 2001; Antonietti, 2001; Byrne, Johnson Laird, 1989; Gick & Holyoack, 1980; Guilford, 1968, 1971; Johnson Laird, 1994; Newell, Shaw, Simon, 1958; Newell & Simon, 1972; Sternberg, 1987; Van de Geer, 1957; Wason, Evans, 1975; Wason, Johnson Laird, 1997). Le definizioni appena esposte lasciano intravedere l'esistenza di un legame tra ragionamento e problem solving anche se non ne viene precisata la natura; appare

pertanto sensato chiedersi che tipo di relazione lega queste due abilità cognitive: si tratta di una relazione di coincidenza/ uguaglianza, di diversità oppure di una relazione inclusiva, cioè uno dei due fa parte dell'altro?

Il ragionamento viene inteso dalla ricerche contemporanee che se ne occupano come quel processo che è coinvolto in compiti in cui si deve cercare una conclusione valida, sostenuta dalle premesse date (Mercier & Sperber, 2011). La struttura appena presentata può coincidere con quella caratterizzante una situazione problematica in quanto la conclusione da trovare alla luce delle premesse poste può essere considerata come un obiettivo da raggiungere, per il quale, al momento in cui la situazione si presenta, non si conosce quali passaggi è necessario compiere al fine di arrivare alla risposta corretta; non a caso Sternberg (1987) ha etichettato con il termine di problema i compiti costituiti da premesse e conclusione mettendo in evidenza l'esistenza di due tipologie di problemi e di ragionamento ad essi associato: problemi aventi una struttura induttiva, come le analogie, i completamenti di serie e le classificazioni, la cui soluzione richiede un processo di ragionamento induttivo; e i problemi di deduzione, come i sillogismi lineari, categorici e condizionali, per i quali è necessario attivare un processo di ragionamento deduttivo. Tale distinzione è stata ampiamente utilizzata dagli studiosi che si sono occupati di ragionamento inteso come processo coinvolto nella soluzione di problemi (Anolli, Antonietti, Crisafulli, Cantoia, 2001; Antonietti, 2001; Byrne, Johnson Laird, 1989; Gick & Holyoack, 1980; Johnson- Laird, 1993; Klauer and Oberauer, 1995; Wason, Evans, 1975; Wason, Johnson- Laird, 1977). L'induzione contraddistingue quei processi di ragionamento in cui viene generata una conclusione che accresce l'informazione semantica contenuta nelle osservazioni o nelle premesse iniziali (Johnson-Laird, 1993). L'informazione semantica trasmessa dalla conclusione in un processo induttivo non è sinonimo di verità, in quanto nell'induzione e nella deduzione non vi è alcuna garanzia sulla verità delle loro conclusioni. Se una conclusione indotta risulta essere falsa non si deve necessariamente cambiare opinione rispetto alla verità delle premesse; al contrario nel caso di una deduzione se la conclusione generata mediante un'inferenza deduttiva valida risulta essere falsa significa che essa si

basa su premesse false e pertanto è necessario rivedere la credenza nell'una o nell'altra premessa (Johnson-Laird, 1993). Il processo induttivo si compone di tre momenti:

- 1) la prima fase è costituita da un insieme di proposizioni, asserzioni verbali o dati percettivi;
- 2) il secondo passaggio è dato dalla formulazione di un'ipotesi che permetta una descrizione o una migliore comprensione dell'informazione contenuta dalla situazione iniziale in relazione ad uno sfondo di conoscenze generali;
- 3) il terzo momento è dato dalla valutazione della conclusione raggiunta; al termine del quale il ragionatore può decidere se mantenerla, modificarla oppure abbandonarla.

Vengono distinte diverse tipologie di induzione (Johnson- Laird, 1993). Una prima classe è data dalle forme di induzione d'uso comune nella vita quotidiana che, pur andando oltre l'informazione inizialmente presentata, si riferiscono ad eventi specifici focalizzandosi sulle loro cause o le loro ragioni. Un esempio di questa tipologia di induzione è il seguente: «Dopo aver mangiato un'aragosta mi sento male»; l'inferenza induttiva derivante può essere costituita dalla seguente proposizione «Mi sento male perché l'aragosta mi ha guastato lo stomaco». Un altro tipo di induzione presente nell'uso quotidiano è dato da quelle inferenze che partendo dal particolare portano ad una conclusione generale; un esempio può essere la seguente situazione in cui durante un viaggio a Londra si parcheggia l'auto in sosta vietata e dalle ricadute connesse a questo comportamento si inferisce «Parcheggiare l'auto dove sono presenti una o più linee gialle al margine della strada, comporta il blocco dell'auto mediante le ganasce oppure la rimozione operata dal carro attrezzi». Infine, il processo induttivo, anziché essere una semplice descrizione di quanto accade, può essere accompagnato dalla ricerca di una spiegazione, come nel caso seguente: «I voli interni di solito sono in ritardo perché troppi aerei partono ed arrivano in troppo pochi aeroporti, e così, non potendo tutti atterrare e decollare simultaneamente, devono accatastarsi a diverse altezze d'attesa in aria e formare lunghe file a terra». La distinzione tra un processo induttivo che genera una descrizione o una spiegazione è particolarmente importante nel pensiero scientifico, in quanto permette di discriminare le leggi scientifiche, costituite da descrizioni generali dei fenomeni, come

la terza legge di Keplero, dalle teorie scientifiche, il cui scopo è dato dalla spiegazione di regolarità contenute nelle descrizioni dei fenomeni che costituiscono le leggi scientifiche sulla base di considerazioni più fondamentali (Johnson-Laird, 1993). Un esempio di ragionamento induttivo è dato dal pensiero analogico che si basa sul trasferimento di idee da una situazione familiare ad una nuova situazione (Anolli, Antonietti, Crisafulli, Cantoia, 2001; Antonietti, 2001; Gick & Holyoack, 1980). Generalmente tale processo implica l'estensione di alcune informazioni, principi o insight derivanti da un determinato insieme di conoscenze e di esperienze ad un dominio sconosciuto. Il pensiero analogico coinvolto nella soluzione di problemi ("analogical problem solving") si compone di diverse fasi (Antonietti, 2001; Gick & Holyoack, 1983):

- 1) la fase di codifica, cioè la nuova situazione da affrontare deve essere compresa e si deve individuare gli elementi di cui essa si compone;
- 2) la fase del recupero, in cui gli elementi rilevanti che connotano la nuova situazione spingono gli individui a richiamare alcune componenti centrali nella soluzione di una situazione precedentemente affrontata (soluzione target);
- 3) la fase della corrispondenza, in cui i solutori creano ordinatamente delle corrispondenze tra gli elementi della nuova situazione, definita con il termine fonte ("source"), e quelli della situazione familiare ("target") al fine di identificare la soluzione del problema che ci si trova ad affrontare.

Il processo induttivo consistente nell'applicazione di informazioni possedute dall'individuo contraddistingue le situazioni in cui l'induzione avviene mediante l'utilizzo di categorie (Osherson, Smith, Wilkie, Lopez, Shafir, 1990; Sloman, 1993, 1994; Smith, Shafir, Osherson, 1994). Tale processo consiste nello stabilire sovrapposizioni tra le diverse categorie menzionate nelle premesse e le categorie immediatamente sovraordinate; la probabilità che gli attributi noti di alcune categorie siano generalizzati ad altre è funzione dell'estensione delle sovrapposizioni. Secondo la teoria della "somiglianza-copertura" (Osherson, Smith, Wilkie, Lopez, Shafir, 1990) la capacità di trarre ipotesi induttive da categorie dipende da tre fattori, due di somiglianza e uno di copertura:



- 1) la fiducia nella conclusione cresce con il grado di somiglianza tra le categorie nelle premesse e la categoria nella conclusione;
- 2) la fiducia nella conclusione cresce con il grado di somiglianza tra le categorie nelle premesse e la categoria sovraordinata S, di più basso livello possibile, che includa le categorie menzionate nelle premesse e la categoria menzionata nella conclusione;
- 3) la fiducia nella conclusione cresce all'aumentare della copertura della categoria sovraordinata S', che include le categorie nelle premesse, rispetto a S (ove con copertura si intende il rapporto di estensione tra S' e S).

L'induzione può infine avvenire attraverso due meccanismi: la combinazione concettuale, in cui vengono immaginati nuovi concetti mediante la ricombinazione di parti di concetti noti e in cui è possibile fare ipotesi plausibili sul significato di nuovi concetti linguistici (Kay, Zimmer, 1976; Murphy, 1988, 1990; Wisniewski, 1996), e l'approccio genetico che, simile al processo di selezione naturale, permette una ricombinazione casuale delle conoscenze e, tra le miriadi di conoscenze assurde così ottenute, consente la sopravvivenza delle sole che dimostrano di avere un qualche successo nel confrontarsi con l'ambiente (Holland, Holyoak, Nisbett, Thagard, 1986).

La deduzione, invece, caratterizza quei processi di ragionamento in cui non si aggiunge niente a quanto contenuto nelle premesse iniziali, in quanto esse contengono tutta l'informazione possibile per poter trarre una conclusione certa. Si tratta di processo di ragionamento in cui la conclusione è vera nel momento in cui anche le premesse sono vere; questa condizione determina anche la validità della deduzione. Nel momento in cui non viene garantita la verità delle premesse allo stesso tempo non vi è alcuna garanzia sulla verità della conclusione dedotta a partire dalle premesse iniziali (Johnson- Laird, 1993). Un esempio di ragionamento deduttivo è dato dal problema del THOG (Wason, Brooks, 1979) in cui vengono date quattro figure geometriche (due cerchi, di cui uno nero e uno bianco, e due quadrati, di cui uno nero e uno bianco); lo sperimentatore scrive segretamente su un foglietto uno dei colori (nero o bianco) e una delle forme (quadrato o cerchio) e stabilisce che

*“Una figura è un “thog” se, e solo se, ha il colore scritto sul foglietto, o la forma scritta sul foglietto, ma non entrambe le cose”.*



**Figura 1 - L'immagine mostra le quattro figure geometriche che costituiscono il materiale mostrato ai partecipanti impegnati nella soluzione del problema del THOG**

Successivamente viene indicata una delle figure presentate come un esempio di THOG, per cui si chiede ai partecipanti se tra le tre figure rimanenti ci sono o non ci sono dei THOG.

Per stabilire la correttezza di un'inferenza deduttiva e quindi se la risposta fornita ad un compito di deduzione è giusta o sbagliata ci si avvale di due criteri, importati dalla logica, che rappresenta il criterio normativo del ragionamento: il criterio semantico e il criterio sintattico. Il primo consiste nell'esaminare in maniera esaustiva tutte le condizioni possibili; una tale analisi dipende dal significato delle premesse e dei connettivi in esse contenuti (Johnson- Laird, 1993). Il controllo di validità della conclusione dedotta basato su un approccio semantico è dato da un insieme di principi che permettono di costruire tavole di verità ed eliminare righe da queste alla luce del significato delle premesse e, in particolare, del significato dei connettivi proposizionali come *non*, *se*, *e*, *o*. Per comprendere in dettaglio come si procede nel momento in cui si tratta di fare un'analisi di validità per via semantica, si consideri la seguente situazione descritta da queste proposizioni: «La donna stava rincorrendo il treno»; «La donna stava cercando di prendere il treno». Dal momento che ciascuna di queste due proposizioni può essere vera o falsa, è possibile combinare i valori di verità di queste ultime secondo quattro modalità, che vengono esplicitate dalla seguente tavola di verità:

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| La donna stava rincorrendo il treno | La donna stava cercando di prendere il treno |
|-------------------------------------|--|

Vero

Vero

Vero

Falso

Falso

Vero

Falso

Falso

Ciascuna della riga della tavola di verità costruita corrisponde ad una possibilità distinta: la prima riga, per esempio, è data dalla situazione in cui entrambe le proposizioni sono vere; pertanto la prima premessa della deduzione corrisponde ad una possibilità espressa mediante l'utilizzo del condizionale:

Se la donna stava rincorrendo il treno, allora stava cercando di prenderlo.

Data la verità della premessa espressa al condizionale («se la donna stava rincorrendo il treno»), la situazione contemplata dalla seconda riga della tavola di verità sopra costruita può essere eliminata in quanto è impossibile che se è vero l'antecedente, il conseguente «La donna stava cercando di prendere il treno» sia falso. Allo stesso modo se la premessa «La donna stava cercando di prendere il treno» è vera, questa determina la condizione di verità della premessa rappresentata da «La donna stava rincorrendo il treno» eliminando, pertanto, le situazioni corrispondenti alla terza e alla quarta riga. A questo punto, quindi, rimane solamente la prima riga:

La donna stava rincorrendo il treno

La donna stava cercando di prendere il treno

Vero

Vero

In questo caso si può concludere affermando veramente che la donna stava cercando di prendere il treno, in quanto non esiste alcuna situazione nella quale le premesse siano vere e la conclusione sia falsa; la conclusione raggiunta per via semantica può quindi considerarsi vera.

Il criterio sintattico è costituito da un insieme di regole inferenziali che, dato un insieme di premesse con una determinata forma, consentono automaticamente di stabilire una conclusione.



Bara, 1984; Johnson-Laird & Byrne, 1991) è la ricerca di controesempi al modello mentale iniziale. Il ragionatore, cioè, deve verificare l'esistenza di modelli alternativi rispetto a quanto precedentemente prefigurato: se partendo dalla verità delle premesse iniziali è possibile dedurre una conclusione contraria, quindi falsa, rispetto alla conclusione iniziale, che risulta essere vera. Se viene trovato un simile modello, la precedente conclusione viene rigettata e ne viene prodotta un'altra e si procede secondo le modalità appena descritte fino all'esaurimento delle risorse cognitive disponibili o dei modelli alternativi che è possibile costruire a partire dal problema dato. Nel momento in cui non è possibile costruire altri modelli o nel caso in cui si sia verificata la non esistenza di modelli alternativi la conclusione può essere considerata valida.

Come precedentemente affermato, il ragionamento deduttivo interviene nella soluzione di problemi aventi la forma di sillogismi, che sono composti da due premesse ed una conclusione (Sternberg, 1987). I termini, invece, rappresentano gli argomenti delle due premesse e si distinguono in termini estremi, che sono presenti in una sola delle due premesse, e in termini medi, che compaiono in ciascuna delle due premesse. La conclusione consiste nel stabilire una relazione tra i termini estremi delle premesse escludendo il termine medio. Si distinguono diverse tipologie di sillogismi: lineari, categorici e con connettivi proposizionali di tipo vero funzionale, in cui sono inclusi i sillogismi condizionali (Johnson-Laird, 1993; Sternberg, 1987).

I primi consistono in un'inferenza relazionale basata su relazioni che godono di proprietà ben definite, quali la transitività. Un esempio di sillogismo lineare è il seguente:

Anna è più alta di Berta

Claudia è più bassa di Berta

Quindi, Anna è più alta di Claudia.

Una forma particolare di sillogismi lineare è rappresentata dai sillogismi spaziali, che sono costruiti sulla base di relazioni tra posizioni fisiche, come

A è a destra di B

B è a destra di C

Quindi, A è a destra di C.

I sillogismi categorici o “aristotelici” sono composti da due premesse e una conclusione consistenti in proposizioni quantificate secondo uno dei quattro modi possibili:

- 1) Universali Affermative (A): per esempio “Tutti gli A sono B”
- 2) Universali Negative (E): per esempio “Nessun B è A”
- 3) Particolari Affermative (I): per esempio “Alcuni A sono B”
- 4) Particolari Negative (O): per esempio “Alcuni A non sono B”.

In questo caso, la conclusione è quindi data dallo stabilire una relazione quantificata tra i termini estremi delle premesse, escludendo il termine medio. Un esempio di sillogismo categorico è il seguente:

Tutti i bovini sono animali

Alcuni bovini sono mucche

Tutte le mucche sono animali.

I sillogismi con connettivi proposizionali di tipo verofunzionale sono formati da proposizioni in cui sono presenti connettivi, costituiti da operatori logici di tipo verofunzionale, indicanti cioè la verità esclusiva degli argomenti che compongono la proposizione in cui il connettivo è presente. I connettivi logici utilizzati nei sillogismi possiedono una parziale corrispondenza con i connettivi linguistici, salvo alcune eccezioni. Tra i connettivi logici con equivalenza linguistica vi è la negazione (Johnson- Laird, 1983, 1993; Sternberg, 1987): una proposizione avente la forma di non- $p$  è vera solo se la proposizione formata da  $p$  è falsa, che corrisponde alla situazione indicata dalla seconda riga della sottostante tavola di verità:

| $p$   | $non\ p$ |
|-------|----------|
| Vero  | Falso    |
| Falso | Vero     |

Un altro connettivo utilizzato è la congiunzione (Johnson- Laird, 1983, 1993; Sternberg, 1987), in cui la verità della proposizione è data dalla verità di entrambi gli argomenti di cui la proposizione è composta, così come viene rappresentata dalla prima riga della sottostante tavola di verità:

| $p$   | $q$   | $p \text{ e } q$ |
|-------|-------|------------------|
| Vero  | Vero  | Vero             |
| Vero  | Falso | Falso            |
| Falso | Vero  | Falso            |
| Falso | Falso | Falso            |

La disgiunzione è un altro connettivo che viene utilizzato nella costruzione di sillogismi (Johnson- Laird, 1983, 1993; Sternberg, 1987). Essa può essere inclusiva, quando entrambi gli argomenti della proposizione sono veri, come nella prima riga della seguente tavola di verità:

| $p$   | $q$   | $p \text{ o } q$ |
|-------|-------|------------------|
| Vero  | Vero  | Vero             |
| Vero  | Falso | Vero             |
| Falso | Vero  | Vero             |
| Falso | Falso | Falso            |

La disgiunzione può anche essere esclusiva, in cui vengono escluse le possibilità rappresentate dalla verità di entrambi gli argomenti (seconda e terza riga della tavola di verità); in logica tale connettivo viene simboleggiato con “xor”:

| $p$   | $q$   | $p \text{ xor } q$ |
|-------|-------|--------------------|
| Vero  | Vero  | Falso              |
| Vero  | Falso | Vero               |
| Falso | Vero  | Vero               |
| Falso | Falso | Falso              |

Infine vi è il sillogismo condizionale (Johnson- Laird, 1983, 1993; Sternberg, 1987), la cui forma semplice è data dalla struttura “se...allora...”, in cui si ammette che la conseguenza possa

verificarsi anche in assenza della condizione; viene considerato falso solo quando l'antecedente è vero e il conseguente falso (seconda riga della tavola di verità):

| $p$   | $q$   | <i>se p allora q</i> |
|-------|-------|----------------------|
| Vero  | Vero  | Vero                 |
| Vero  | Falso | Falso                |
| Falso | Vero  | Vero                 |
| Falso | Falso | Vero                 |

Tale tipo di sillogismo può portare ad errori deduttivi in quanto spesso il condizionale semplice si sovrappone un'interpretazione bicondizionale delle regole condizionali (Cohen, 1981).

Il condizionale naturale può inoltre corrispondere alla forma del bicondizionale logico “se e solo se p, allora q”, tipico delle espressioni linguistiche che descrivono le condizioni di necessità e sufficienza e nella tavola di verità viene espresso con “sse”:

| $p$   | $q$   | <i>sse p allora q</i> |
|-------|-------|-----------------------|
| Vero  | Vero  | Vero                  |
| Vero  | Falso | Falso                 |
| Falso | Vero  | Falso                 |
| Falso | Falso | Vero                  |

Solitamente i sillogismi condizionali vengono utilizzati nella forma del modus ponens o MP (Johnson- Laird, 1983, 1993; Sternberg, 1987; Wason, Johnson- Laird, 1977):

se p allora q

p

Quindi, q

oppure nella forma del modus tollens o MT (Johnson- Laird, 1983, 1993; Sternberg, 1987; Wason, Johnson- Laird, 1977):



se p allora q

non q

Quindi, non p

È stato messo in evidenza che la seconda forma del sillogismo condizionale, espressa attraverso il modus tollens è più complessa rispetto alla forma rappresentata dal modus ponens (Evans, Newstead, Byrne, 1993).

È possibile, pertanto, dedurre che le ricerche contemporanee che si occupano di ragionamento e che condividono la definizione presentata sopra si occupano di specifici processi di ragionamento che intervengono nella soluzione di problemi, aventi la forma di sillogismi o di analogie, e che condividono le caratteristiche sopra delineate. Con questo non si intende affermare che ragionamento e problem solving coincidono, ma semplicemente che si tratta di due processi strettamente correlati tra loro, al punto tale che una parte della recente bibliografia ha scelto di occuparsi di ragionamento inteso come problem solving. Gli studi contemporanei riguardanti il ragionamento/problem solving si sono concentrati sulla dimensione cognitiva di tale processo mettendo in evidenza la connessione tra il ragionamento e altre abilità cognitive; una di queste è l'intelligenza che, intesa come un unico fattore generale (fattore G), risulta essere sottostante a tutte le facoltà intellettive coinvolte nel momento in cui ci si trova a risolvere test indaganti le abilità cognitive, come i test d'intelligenza quali la WAIS (Wechsler, 1997) e Woodcock- Johnson Psycho-Educational Battery- Revised (WJ- R, Woodcok & Johnson, 1989) , caratterizzati da una batteria di compiti la cui struttura è conforme a quella di un problema (Burns, Bastian, Nettlebeck, 2007; Burns, Nettlebeck, McPherson, 2009). In particolare il fattore G è composto da altri cinque fattori, corrispondenti a quelli riscontrabili nella tassonomia di Carroll (1993): l'abilità fluida (Gs), l'abilità cristallizzata (Gc), l'abilità della velocità di processamento (Gs), l'abilità viso-spaziale (Gv) e lo span di memoria (Gsm). Centrale nella soluzione di compiti problematici risulta essere il coinvolgimento dell'intelletto. Prendendo in considerazione il modello dei cinque fattori di personalità (five- factor model of personality- Big Five, Costa & McCray, 1992a, b) secondo il

quale i tratti di personalità possono essere classificati secondo cinque domini: Estroversione, Piacevolezza, Coscienziosità, Nevroticità e Apertura/Intelletto, le ricerche contemporanee hanno preso in esame quest'ultimo tratto di personalità (DeYoung, Peterson, & Higgins, 2005; DeYoung, Quilty, & Peterson, 2007; DeYoung, Braver, Shamosh, Green, Gray, 2009), la cui etichetta rivelante il carattere duale di questo fattore è oggetto di un vecchio dibattito risolto affermando che Apertura ed Intelletto descrivono due aspetti collegati ma separati di un più largo dominio (Johnson, 1994; Saucier, 1992). Attraverso l'utilizzo di compiti di memoria, questi studi hanno messo in evidenza che Apertura ed Intelletto sono due aspetti di personalità distinti; in particolare quest'ultimo risulta essere strettamente correlato con la memoria di lavoro (working memory, WM), che rappresenta un'altra abilità cognitiva coinvolta nel processo di ragionamento implicato nella soluzione di problemi. Per working memory si intende un sistema generale che è responsabile dell'attivo mantenimento dell'informazione rilevante per gli scopi del compito, mentre, simultaneamente, è presente un'attività di processamento di altre informazioni (Baddeley, 2007). Le ricerche contemporanee che si sono focalizzate sulla relazione tra la memoria di lavoro e il ragionamento hanno sottolineato come la capacità della working memory sia costituita da due componenti: la memoria primaria (primary memory, PM) e la memoria secondaria (secondary memory, SM), aventi ciascuna funzioni differenti: la prima è responsabile del mantenimento attivo della concentrazione, a discapito del fenomeno della distrazione; mentre la seconda si occupa del recupero di informazioni che non possono attivamente mantenute nella memoria primaria a seguito dell'ingresso di un numero elevato di stimoli distrattori (Burns, Nettlebeck, McPherson, 2009; DeYoung, Braver, Shamosh, Green, Gray, 2009; Unsworth, Engle, 2007a; Unsworth, Spillers, Brewer, 2010; Morgan, Patrick, Waldron, King, Patrick, 2009; Schmeideck, Hildebrandt, Wilhelm, Lövdén, Linderberger, 2009; van Leeuwen, Hoekstra, van den Berg, Boomsma, 2009). L'attenzione, infine, è un'altra abilità cognitiva coinvolta nel processo di soluzione di problemi; in particolare essa risulta essere costituita da tre fattori, coinvolti in diversa misura in base alle richieste del compito: uno legato ad una delle componenti del fattore generale di intelligenza, la

velocità di processamento (Gs), un altro legato alla working memory ed infine l'ultimo, definito di attenzione prolungata, che interviene in compiti cognitivi complessi che si estendono per un periodo di tempo prolungato (Burns, Nettlebeck, McPherson, 2009; Schweizer, Moosbrugger, & Goldhammer, 2005; Unsworth, Spillers, Brewer, 2010).

L'enfasi sugli aspetti cognitivi del ragionamento coinvolto nella soluzione di problemi emerge anche dalla ricerca che hanno preso in esame il processo implicato in compiti di decision making, che possono essere considerati problemi in quanto ne condividono la struttura. Tali studi si sono concentrati sul processo di decision making mettendo in evidenza diverse sfaccettature di tale processo. L'abilità di generare e di valutare gli argomenti è vitale nel momento in cui si tratta di prendere solide decisioni e di comprendere il mondo fisico e sociale. L'abilità decisionale può essere considerata un processo inferenziale e pertanto rientrante nella capacità di affrontare e gestire le situazioni problematiche (problem solving), in quanto si tratta di dover giungere ad una conclusione, rappresentata dalla decisione, sulla base dell'informazione contenuta nella situazione iniziale. Questa abilità si avvale di diverse capacità rientranti nel ragionamento, una delle quali è rappresentata dall'abilità di cercare l'evidenza a favore degli argomenti oggetto di discussione e dalla capacità di valutare le spiegazioni che vengono offerte a sostegno delle argomentazioni prodotte (Brem & Rips, 2000). L'evidenza e la spiegazione svolgono entrambe la funzione di sostegno delle affermazioni prodotte, ma si tratta di due elementi separati, nonostante la loro stretta interrelazione: la prima è costituita da quei dati, da quei fatti che, analizzati dal punto di vista argomentativo, appaiono essere a fondamento delle affermazioni prodotte; mentre la seconda è rappresentata da proposizioni ipotetiche che possono agire come collegamenti tra varie affermazioni che vengono prodotte a sostegno delle argomentazioni da valutare (Brem & Rips, 2000; Thagard, 1988; Toulmin, 1958). Una spiegazione che non è sostenuta dall'evidenza produce meno supporto all'affermazione da appoggiare rispetto ad una la cui spiegazione è sostanziata dall'evidenza; pertanto gli argomenti che si affidano solamente su spiegazioni sprovviste di evidenza sono meno "robusti" rispetto a quelli basati sulle spiegazioni supportate dall'evidenza (Brem & Rips, 2000).

Generalmente gli esseri umani non dimostrano di possedere buone capacità di valutazione delle argomentazioni prodotte a sostegno di un'ipotesi. Questo non è causato dalla mancata comprensione della differenza tra spiegazione ed evidenza, ma può essere dovuto a fattori pragmatici che intervengono nel momento in cui si deve prendere una decisione (Brem & Rips, 2000). Le persone, infatti, tendono a basarsi sulle spiegazioni nel momento in cui vi sono scarse evidenze perché le spiegazioni migliorano la comprensione dei problemi, aiutando la ricerca di modelli che individuano la struttura della situazione rappresentata dai dati (Wright & Murphy, 1986) e aumentando le possibilità di soluzione e di generalizzazione della soluzione trovata a nuovi problemi (Chi et al., 1989, 1994). Talvolta, inoltre, le spiegazioni fornite sono così attraenti che bloccano il processo di ricerca di evidenze a favore dell'ipotesi sostenuta (Brem & Rips, 2000). Vi sono infine fattori che influenzano l'abilità di riconoscere le evidenze rilevanti per l'argomentazione da sostenere (Brem & Rips, 2000):

- 1) la ricerca di evidenze richiede l'abilità di immaginare che tipo di evidenze cercare; altrimenti risulterebbe difficile sapere dove trovare. Tale capacità di immaginazione richiede una sufficiente conoscenza del dominio e delle tecniche di osservazione e di raccolta dei dati;
- 2) isolati frammenti di evidenza non reggono bene il confronto con una buona spiegazione. La distribuzione della possibile evidenza e le spiegazioni possibili a volte si sovrappongono in modo tale che la spiegazione sembra essere la scelta più ragionevole;
- 3) la preferenza dell'evidenza a discapito della spiegazione può avvenire nel momento in cui l'evidenza è solida dal punto di vista statistico o scientifico e quindi i partecipanti, a seconda delle richieste del compito a cui sono sottoposti, preferiscono scegliere questa tipologia di evidenza in quanto ritengono che sia quanto il ricercatore vuole sentirsi dire.

I compiti di decision making e di problem solving in generale sono influenzati sia dalla competenza dei membri che compongono un determinato gruppo di lavoro (Bonner, Bauman, & Dalal, 2002) sia

dall'esecuzione del compito non individualmente ma in gruppo (Kocher, Sutter, 2005; Laughlin, Bonner, Miner, 2002; Laughlin, Hatch, Silver, Boh, 2006; Smith, Bushouse, Lord, 2009).

Per quanto riguarda il fattore rappresentato dalla competenza dei membri, cioè l'expertise, è stato dimostrato che nel momento in cui vengono fornite informazioni riguardanti una possibile graduatoria dei componenti in base alle loro competenza, la performance di gruppo tende a seguire i percorsi di soluzione suggeriti dall'individuo maggiormente competente (Bonner, Bauman, & Dalal, 2002). Lo svolgimento di compiti di produzione di un'inferenza, che può essere rappresentata da una conclusione o da una decisione, in gruppo rispetto ad un'esecuzione individuale produce risultati positivi; infatti la performance di gruppo risulta essere superiore della performance individuale, anche nel momento in cui questa si riferisce al miglior individuo che si è trovato ad affrontare la situazione problematica affrontata dal gruppo (Kocher, Sutter, 2005; Laughlin, Bonner, Miner, 2002; Laughlin, Hatch, Silver, Boh, 2006; Smith, Bushouse, Lord, 2009). Il ragionamento esercitato in compiti inferenziali condizionali è influenzato dall'azione del bias rappresentato dalle credenze possedute dal ragionatore impegnato nello svolgimento del compito. L'azione di questo bias (belief bias), a differenza di quanto avviene in compiti di ragionamento sillogistico, non viene ridotta dalle limitazioni temporali ed è presente nel momento in cui si tratta di valutare la verità sia delle premesse che della conclusione; pertanto sembra che questo bias agisca in maniera indipendente dal controllo volitivo in compiti di inferenza condizionale (Evans, Handley & Bacon, 2009).

Rientrano in questo contesto anche gli studi che sottolineano l'esistenza e il funzionamento di due sistemi di ragionamento, il sistema associativo o System 1, e il sistema governato da regole o System 2 (Evans, 2007, 2008; Evans & Over, 1996; Kahneman & Frederick, 2002; Kahneman, 2003; Sloman, 1996; Stanovich, 1999). Il primo, inteso come un pensiero empirico basato su una catena di associazioni di immagini emergenti l'una dall'altra, codifica e processa le regolarità statistiche dell'ambiente, le frequenze e le correlazioni tra le varie proprietà del mondo; si tratta di operazioni generalmente automatiche, veloci, non richiedenti sforzi, implicite e governate dalle

abitudini, pertanto difficilmente controllabili. L'altro è un sistema simbolico e i suoi processi riflettono una regola di struttura; le sue operazioni sono più lente rispetto a quelle del sistema associativo, seriali, richiedenti sforzi, monitorate a livello cosciente e potenzialmente governate da regole. Entrambi i sistemi di ragionamento intervengono nel processo di ragionamento coinvolto nella soluzione di problemi portando a differenti soluzioni. Il focus, anche in questo caso in linea con le ricerche presentate sinora presentate, è rivolto alla dimensione cognitiva connessa al funzionamento di questi due sistemi; pertanto il problem solving viene concepito dalle ricerche contemporanee come un processo di ragionamento che avviene a livello cognitivo in cui intervengono diverse abilità cognitive.

## **1.2 Il ragionamento matematico.**

Dopo aver preso in esame le ricerche contemporanee riguardanti il problem solving inteso come processo di ragionamento ed aver messo in evidenza come tale processo viene da esse concepito, l'attenzione è ora rivolta al modo in cui gli studi contemporanei che si occupano di matematica descrivono il ragionamento in essa coinvolto. La scelta di considerare il pensiero matematico deriva dal fatto che nella Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 (2006/962/CE) in cui vengono riportate le definizioni ufficiali delle otto competenze chiave, la competenza matematica viene definita come l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane; centrale, pertanto, nel pensiero matematico risulta essere la capacità di gestire e risolvere situazioni problematiche. Il pensiero matematico può, quindi, essere declinato come processo di ragionamento coinvolto nella soluzione di compiti matematici aventi le caratteristiche di problemi ed essere considerato come una forma di problem solving (Merrifield, Guilford, Christensen, & Frick, 1962; Polya, 1945). Le ricerche contemporanee che si occupano del ragionamento matematico considerano la matematica come una disciplina comprendente al suo interno diversi domini, quali l'aritmetica, le competenze di misurazione, la geometria, l'algebra e la statistica, e supportata, secondo la distinzione teorica

operata da Geary (2004; Geary & Hoard, 2005), da competenze specifiche riguardanti la conoscenza concettuale, collegata alla capacità di comprensione dei concetti matematici, delle operazioni e delle relazioni tra i concetti (Goldman & Hasselbring, 1997; Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001; McCloskey, Aliminosa, & Macaruso, 1991), e la conoscenza procedurale, riferita alle strategie di calcolo e a competenze procedurali (Dowker, 2005; Jordan, Hanich, & Uberti, 2003; Kilpatrick et al., 2001; Siegler, 1988) e da abilità cognitive generali (Andersson, 2010). Gli studi che hanno trattato tale tematica hanno evidenziato gli aspetti cognitivi delle capacità matematiche e del processo di ragionamento in esse coinvolto (Andersson, 2010; Fuchs, Fuchs, Compton, Powell, Seehatler, Capizzi, Fletcher, Schatschneider, 2006; Fuchs, Fuchs, Hamlett, Lambert, Stuebing, Fletcher, 2008; Hart, Petrill, Plomin, Thompson, 2009; Welsh, Nix, Blair, Bierman, & Nelson, 2010). Investigando i correlati cognitivi delle abilità matematiche, l'abilità aritmetica risulta essere strettamente connessa con il comportamento di attenzione, la velocità di processamento e la codifica fonologica (Fuchs, Fuchs, Compton, Powell, Seehatler, Capizzi, Fletcher, Schatschneider, 2006; Fuchs, Fuchs, Hamlett, Lambert, Stuebing, Fletcher, 2008). I risultati ottenuti in merito al legame tra il comportamento di attenzione e la capacità aritmetica mettono in evidenza il ruolo critico e determinante dell'attenzione: l'attenzione è strettamente correlata con il calcolo algoritmico in compiti in cui viene richiesta l'esecuzione seriale e potrebbe altresì funzionare come fattore per discriminare i bambini che presentano difficoltà matematiche. La velocità di processamento, invece, facilita la velocità di calcolo; al tempo stesso la codifica fonologica sembra essere legata alla capacità aritmetica agendo come fattore determinante sia delle difficoltà matematiche che di lettura. La relazione tra la competenza matematica e la codifica fonologica è stata ulteriormente indagata dove è stata dimostrata una stretta connessione tra le abilità aritmetiche, l'abilità di lettura e una generale abilità cognitiva (Hart, Petrill, Plomin, Thompson, 2009; Welsh, Nix, Blair, Bierman, & Nelson, 2010). Altri studi in quest'ambito si sono concentrati sul ruolo della rappresentazione mentale nel pensiero matematico. La rappresentazione lineare della grandezza dei numeri risulta essere fortemente legata alla performance matematica

(Booth, Siegler, 2008; Butterworth, Zorzi, Girelli, Jonckheer, 2001; Dehaene, Bossini, Giraux, 1993; Dehaene, Dehaene-Lambertz, Cohen, 1998; Gallistel, Gelman, 2000; Siegler, Ramani, 2009; Zorzi, 2002): la rappresentazione lineare della grandezza dei numeri è positivamente correlata con la linearità delle misure di stima, la stima di numerosità, la categorizzazione numerica, il confronto della grandezza numerica (Booth & Siegler, 2006; Laski & Siegler, 2007; Siegler & Booth, 2004), l'abilità aritmetica e con la memoria a breve termine per i numeri (Booth, Siegler, 2008). La rappresentazione della grandezza numerica gioca un ruolo determinante anche nell'apprendimento aritmetico favorendo l'acquisizione di nuove informazioni numeriche (Booth, Siegler, 2008). Altre ricerche si sono concentrate sulle strategie di soluzione coinvolte nella soluzione di problemi di calcolo, in cui le competenze aritmetiche risultano essere fondamentali. Sono state pertanto investigate le strategie coinvolte nell'addizione e nella sottrazione (Carr & Davis, 2001; Carr & Jessup, 1997; Torbeyns, Verschaffel, & Ghesquière, 2004), nella moltiplicazione (Lemaire & Siegler, 1995; Siegler & Lemaire, 1997), nell'addizione e nella sottrazione di numeri composti da più cifre (Beishuizen, 1993; Beishuizen, Van Putten, & Van Mulken, 1997; Blöte, Van der Burg, & Klein, 2001; Fuson et al., 1997; Torbeyns, Verschaffel, & Ghesquière, 2006) e nella divisione (Hickendorff, van Putten, Heiser, Verhelst, 2010; Robinson et al., 2006; Van Putten, Van den Brom-Snijders, & Beishuizen, 2005) prendendo in esame le quattro dimensioni delle competenze strategiche su cui gli individui potrebbero differire: il repertorio di strategie, riferito alle strategie che vengono utilizzate, la distribuzione delle strategie, riguardante la frequenza con cui le strategie vengono usate, l'efficienza delle strategie, relativa alla velocità e all'accuratezza della strategia, e la selezione della strategia, relativa cioè al modo in cui le strategie vengono scelte in relazione al problema e alle caratteristiche individuali. È stata, inoltre indagata, la capacità di comprendere il segno uguale che rappresenta un simbolo relazionale e non operativo (Ginsburg, 1977) indicante una relazione bilanciata esistente tra i due lati dell'equazione (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey, 2007) e quindi la comprensione del suo significato risulta essere fondamentale nella soluzione di problemi verbali (word problems) e di compiti in cui si richiede l'utilizzo di superiori



competenze matematiche, quali l'algebra (Powell, Fuchs, 2010) . Una sbagliata interpretazione del ruolo del segno uguale, infatti, può causare errori nella comprensione e soluzione di equazioni (Carpenter & Levi, 2000; Lindvall & Ibarra, 1980; Weaver, 1973) e può essere associata a difficoltà matematiche (Powell, Fuchs, 2010). Vi sono infine ricerche che si sono concentrate sull'analisi delle situazioni rappresentate dai problemi di inversione ("inversion problems"; Canobi, 2004; Gilmore, Spelke, 2008; Rasmussen, Ho, Bisanz, 2003; Robinson, Ninowski, 2003, Gray, 2006; Robinson, Dubé, 2009; Sherman, Bisanz, 2007). Si tratta di problemi, che possono assumere la forma di " $a+b-b$ " o " $a \times b \div b$ ", la cui soluzione si basa sulla comprensione della relazione inversa implicata nel problema: nel caso di " $a+b-b$ " si deve cogliere che addizione e sottrazione sono due operazioni inverse e che pertanto aggiungere e togliere una medesima quantità costituiscono due azioni opposte che si annullano vicendevolmente; allo stesso modo nella situazione di " $a \times b \div b$ ", moltiplicazione e divisione sono due operazioni inverse e quindi moltiplicare e dividere per una stessa quantità sono due azioni contrapposte che si neutralizzano a vicenda.

Da quanto detto sopra, si evince che il ragionamento coinvolto nella soluzione di compiti matematici viene descritto come un processo implicante diverse abilità e competenze cognitive specifiche, strettamente legati al dominio matematico, e generali, riguardanti cioè il processo di ragionamento. Nonostante l'importanza attribuita alla rappresentazione mentale della grandezza numerica, non vengono prese in esame, in questi studi così come nelle ricerche presentate in precedenza la percezione e il ruolo che i processi percettivo- figurali possono assumere nel pensiero coinvolto nella soluzione di problemi.

La mancata attenzione alle componenti percettivo- figurali nel processo di ragionamento coinvolto nella soluzione di problemi da parte delle ricerche contemporanee sinora prese in esame sembra indicare che queste non siano influenti o abbiano un'influenza marginale nel processo di problem solving. Vi sono, al contrario, studi contemporanei che concentrandosi sui processi coinvolti nell'apprendimento geometrico e nella soluzione di problemi di insight hanno messo in evidenza il ruolo e l'importanza di manipolare e processare gli aspetti visivo- figurali della situazione

problematica, riprendendo quanto già era stato enfatizzato dalla tradizione gestaltista, che per prima si è occupata dei processi di pensiero coinvolti nella soluzione di problemi.

### **1.3 L'importanza della percezione nel pensiero produttivo.**

Gli psicologi gestaltisti (Duncker, 1926, 1935/1945; Köhler, 1920; Maier, 1930, 1931a, 1931b, 1945; Wertheimer, 1919/1945) sono stati i primi ad essersi occupati dei processi di pensiero coinvolti nella soluzione di problemi fornendo una descrizione fenomenica di quello che accade nel momento in cui le persone si trovano ad affrontare situazioni problematiche (Nerney, 1979). Prendendo le distanze dalla teoria associazionista allora in auge, di cui Thorndike (1898) rappresenta uno degli esponenti, secondo la quale i processi di pensiero venivano classificati come comportamenti e quindi spiegabili in termini di catene associative costituite da stimolo e risposta, i gestaltisti hanno distinto due tipologie di pensiero: il pensiero riproduttivo, che consiste nell'applicazione di catene di associazioni precedentemente acquisite e rinforzate dall'esperienza e dalle abitudini, e il pensiero produttivo che, a differenza del precedente, contraddistingue quegli atti di pensiero che possono essere definiti intelligenti in quanto si tratta di processi di pensiero che, impegnati nella ricerca di soluzioni ai problemi presentati, portano alla creazione di qualcosa di nuovo. In seguito a questa fondamentale distinzione, gli esponenti della psicologia della Gestalt si sono concentrati prevalentemente sulla descrizione delle caratteristiche che qualificano quest'ultima tipologia di pensiero che può essere identificato come problem solving (Kanizsa, 1973).

Wertheimer (1919/1945/ 1965) ha, per primo, sottolineato come il punto di partenza del pensiero produttivo sia costituito da una profonda comprensione della struttura fenomenico- percettiva del problema dal momento che quest'ultima ne suggerisce la soluzione, postulando in questo modo uno stretto legame tra la struttura fenomenica del problema e la sua soluzione. Questa connessione viene enfatizzata dallo stesso Wertheimer nelle sue lezioni (Luchins & Luchins, 1970) in cui spiega che una delle caratteristiche essenziali di una buona e genuina soluzione è data dal suo adattamento alle richieste intrinseche del problema ed è stata raggiunta seguendo la direzione del compito; queste possono essere considerate come dei vettori che hanno origine nel problema e che

definiscono la direzione da seguire nel processo di ricerca della soluzione; in questo senso la soluzione possiede una relazione intrinseca con quanto viene già dato dalla situazione problematica iniziale, in quanto originata e determinata dalle proprietà strutturali del problema. Per precisare meglio questa relazione, Wertheimer la paragona al collegamento esistente tra una domanda e la sua risposta chiarendo che si tratta dello stesso tipo di legame, in quanto nel momento in cui viene posta una domanda, questa presuppone un determinato dominio che può costituire un orientamento, una direzione da seguire nella ricerca di una risposta che risulta essere corretta ed adeguata qualora essa giace all'interno dello stesso campo di applicazione della domanda andando a completare e a chiudere il gap aperto dal quesito iniziale; se però la risposta data implica un diverso ambito rispetto a quello iniziale, essa può essere non rispondente alle esigenze e pertanto considerarsi inadeguata allo stesso modo di una soluzione non conforme alla direzione e alle richieste del problema (Luchins & Luchins, 1970). Di conseguenza, comprendere la struttura fenomenica del problema cogliendone le componenti primarie e secondarie e le relazioni tra questi è essenziale non solo per individuare l'organizzazione degli elementi problematici ma anche per identificare le lacune o zone di disturbo, contenute nella struttura problematica, che devono essere sanate e che quindi costituiscono degli indizi rispetto alla direzione da seguire nel processo di soluzione. Va precisato che, nell'ottica di Wertheimer e degli altri gestaltisti, la comprensione della struttura del problema non implica un processo cognitivo ma percettivo, in quanto consiste nel cogliere percettivamente l'organizzazione delle proprietà fenomenico- percettive del problema e, al tempo stesso, dato il legame tra la struttura problematica e la sua soluzione, nel vedere quali operazioni è necessario compiere al fine di risolverlo divenendo, quindi, evidente il processo di soluzione. Secondo Wertheimer, quest'ultimo, di fatto, consiste in un processo di riorganizzazione degli elementi del problema, cambiando, cioè, la disposizione delle componenti problematiche e passando quindi da una "cattiva" ad una "buona" forma (Wertheimer, 1945/1965). Tale processo comporta una serie di unioni e di separazioni: si tratta, cioè, di unire quegli elementi che nella situazione problematica erano separati e di separare quelle proprietà che in origine erano unite.

L'importanza che Wertheimer attribuisce alla relazione tra la struttura fenomenica del problema e la sua soluzione viene ripresa nella rilevanza attribuita alla connessione esistente tra un teorema geometrico e la sua dimostrazione. È questo il tema attorno al quale ruotano tre lettere che Wertheimer ed Einstein si sono scambiati presumibilmente nel 1937. Il dibattito attorno al quale ruotano queste lettere riguarda la distinzione tra prove “brutte e belle” (“ugly and beautiful proofs”): le prime sono quelle prove che non soddisfano le richieste intrinseche del teorema da dimostrare, mentre le seconde sono intrinsecamente legate ad ogni proposizione di cui il teorema è composto al punto tale che, così come ha sottolineato Einstein, l'intrinseco legame tra ogni segmento della dimostrazione e la corrispondente affermazione, presente nel teorema, da dimostrare le rende soddisfacenti (Luchins & Luchins, 1990).

La necessità di comprendere, dal punto di vista percettivo, la struttura fenomenica di un problema al fine di riorganizzare, secondo esigenze problemiche interne, in maniera più consona gli elementi problematici caratterizza anche la proposta degli altri psicologi gestaltisti (Duncker, 1926, 1935/1969; Harrower, 1932; Köhler, 1969/1971; Luchins, 1942, 1946; Luchins, & Luchins 1950; Maier, 1930, 1931a, 1931b, 1945). Tuttavia, questi ultimi, a differenza di Wertheimer, hanno altresì evidenziato gli ostacoli che un solutore può incontrare nel processo di problem solving: alcuni derivanti da caratteristiche percettivo strutturali del problema così pregnanti da imporsi in maniera percettivamente forte impedendo lo scorgere e la scoperta di nuove possibili direzioni da seguire; altri causati dall'esperienza. I fenomeni di resistenza al cambiamento, etichettati con il termine fissità, manifestati dalle proprietà percettive degli oggetti rientrano nella prima tipologia di ostacoli sopra descritti (Duncker, 1926, 1935/1945/1969). La fissità funzionale ne rappresenta un esempio: gli oggetti, a causa delle loro caratteristiche che ne determinano l'uso quotidiano, ostacolano il processo di ripensare in maniera differente il loro impiego; un'esemplificazione di questa situazione è data dal problema delle candele (Duncker, 1969): *“su una porta, all'altezza degli occhi, devono essere poste, una accanto all'altra, tre piccole candele”*. Sul tavolo veniva posto del materiale che i partecipanti potevano utilizzare per risolvere il problema: alcune puntine da disegno e tre piccole

scatole di cartone. La soluzione, in questo caso, richiede di non rimanere ancorati alla tradizionale funzione delle scatole, rappresentata dal fatto di poter contenere qualcosa, ma di considerare che esse, grazie alla loro forma, possono essere adatte a ricoprire il ruolo di piattaforma su cui poter appoggiare le cose; pertanto il problema è risolto appendendo alla porta, tramite le puntine da disegno, le tre scatole sulle quali vengono poste le tre candele.

Gli ostacoli posti dalla pregnanza della struttura del problema nel processo di soluzione sono stati evidenziati anche da Köhler (1969/1971) e Harrower (1932): dalla struttura problemica emergono in maniera preponderante delle relazioni tra gli elementi che impediscono la scoperta di nuovi legami che potrebbero essere utili per trovare la soluzione del problema. Un esempio di questa condizione è dato dal problema delle anatre (Harrower, 1932): *“sotto un ponte passano nuotando due anatre davanti a due anatre, due anatre dietro a due anatre, e due anatre in mezzo. Quante anatre ci sono in tutto?”*. La difficoltà nel trovare la soluzione di quattro anatre disposte verticalmente è data dal fatto che il concetto di parità, rappresentato dalla coppia, implica l’uguaglianza data dal posizionare gli elementi in modo spazialmente equidistante dall’osservatore; spontaneamente, quindi, le anatre che formano una coppia vengono organizzate orizzontalmente, cioè una di fianco all’altra. Inoltre, la ripetizione di “due anatre...due anatre...due anatre” porta alla rappresentazione di un gruppo di elementi costituito da tre coppie, ciascuna delle quali composta da due proprie unità; per cogliere che la soluzione di quattro anatre, dove una è dietro l’altra, soddisfa le richieste poste dal problema è necessario considerare ogni anatra come unità a sé stante e non come parte della coppia in modo tale che la coppia centrale sia formata da due anatre che contemporaneamente appartengono alle coppie davanti e dietro. Se il solutore rimane vittima di questi vincoli fenomenici, suggeriti dalla struttura problemica, non arriverà mai alla soluzione di quattro anatre disposte verticalmente.

Maier (1930, 1931a, 1931b, 1945) e Luchins (1942, 1946; Luchins, & Luchins, 1950) si sono invece concentrati sugli intoppi derivati dall’esperienza. La fissità, infatti, oltre ad essere causata dalle proprietà percettive che definiscono l’identità usuale degli oggetti, può originarsi anche da un abituale modo di guardare le cose e dalla tendenza ad utilizzare una determinata procedure, già

usata nella soluzione di compiti simili, per risolvere i problemi successivi che, invece, possiedono una soluzione più diretta (Einstellung effect). Rappresentativa di questa situazione è la serie di problemi di misura del volume, in cui ai partecipanti venivano forniti tre contenitori vuoti di differente capacità, etichettati con le lettere a, b, c, e una certa quantità di acqua; il compito consisteva nell'ottenere un determinato volume di fluido usando la fornitura di acqua e i contenitori come strumenti per misurare la quantità di fluido desiderata (Luchins, 1942, 1946; Luchins, & Luchins, 1950). L'esperimento comprendeva una serie di prove in cui la soluzione poteva essere raggiunta applicando la formula " $b - a - 2c$ ", cioè versare l'acqua nel contenitore "b", eliminare da questo la quantità di fluido corrispondente al contenitore "a" e sottrarre dall'acqua rimanente il doppio del volume corrispondente alla capacità del contenitore "c". In alcuni casi, però, la soluzione consisteva in un metodo più diretto e più semplice, ossia togliendo dal contenitore "a" la quantità di volume corrispondente alla capacità del contenitore "c" (" $a - c$ "), ma anche queste situazioni venivano risolte dai partecipanti applicando la procedura utilizzata in precedenza (" $b - a - 2c$ ") e manifestando in questo modo l'effetto Einstellung.

Nonostante questi autori abbiano messo in luce gli ostacoli derivanti dalla pregnanza percettiva di determinate proprietà caratterizzanti il problema, ritengono che uno dei modi per superare questi impedimenti consista nel ritornare alla struttura fenomenica ed analizzarla in maniera più accurata in modo da scorgere, tra le relazioni percettive che collegano le proprietà problemiche, nuove e possibili direzioni da seguire durante il processo di soluzione.

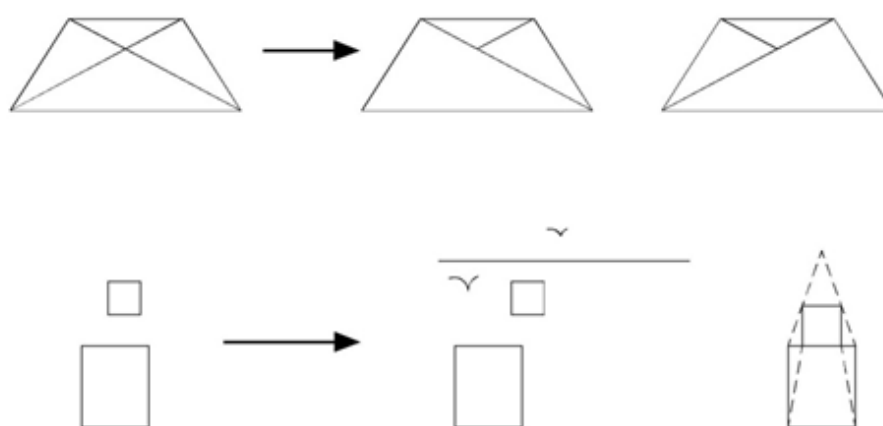
#### **1.4 La visualizzazione in geometria.**

L'importanza degli aspetti figurali è stata recentemente utilizzata dagli studi che si sono occupati dei processi di apprendimento geometrico. In queste ricerche, la geometria, in quanto disciplina scolastica, viene definita come la scienza degli oggetti spaziali, delle loro relazioni e trasformazioni e come l'insieme dei sistemi matematici assiomatici che sono stati costruiti per la loro rappresentazione (Clements, Battista, 1992). Questa definizione mette in luce due aspetti di questa

disciplina: la geometria come scienza dello spazio e la geometria che, in quanto struttura logica, costituisce un ambiente favorevole affinché lo studente acquisisca familiarità con la struttura matematica (Hershkowitz, 1990). Queste due diverse e apparentemente contrarie sfaccettature, una maggiormente legata a processi rappresentativo – figurali e l'altra connessa ad aspetti di formalizzazione, sono in realtà strettamente correlate tra di loro ed entrambi poggianti sull'importanza di processare e manipolare le proprietà figurali di un compito geometrico. Vi sono, infatti, molte ricerche che hanno evidenziato la centralità delle procedure di visualizzazione, consistenti nelle capacità di rappresentare, trasformare, generare, documentare e riflettere sull'informazione visiva mediante l'utilizzo di immagini mentali (Battista, Talsma, Wheatley, 1982; Duval, 1995, 1999, 2006; Gorgorio, 1999; Gray, 1999, Gutierrez, 1992, 1996a, 1996b; Jones & Bill, 1998, Presmeg, 2006). Tali studi, riprendendo la classificazione di Bishop (1989), hanno sottolineato la dualità del processo di visualizzazione, in quanto essa risulta essere composta da due abilità: l'interpretazione visiva dell'informazione, che porta alla creazione di un'immagine mentale, e l'interpretazione di immagini mentali, che conduce alla generazione di nuove informazioni attraverso l'esplorazione della figura immaginata. La centralità della visualizzazione emerge nel momento in cui ci si focalizza sui due aspetti chiave dell'apprendimento geometrico: le figure geometriche e lo spazio. Relativamente alle prime, la visualizzazione supporta tutte le trasformazioni consistenti nel cambiare la forma, la dimensione, l'orientamento dell'iniziale figura geometrica. A tal proposito, è bene precisare che per modificare una forma geometrica bisogna fare attenzione alla sua essenza, in quanto concetto figurale, in cui gli aspetti concettuali e figurali sono strettamente correlati: le proprietà, derivanti dalla natura assiomatica della definizione (dimensione concettuale), sono invarianti; mentre le caratteristiche connesse con la rappresentazione dello spazio geometrico (dimensione figurale), possono essere alterate (Baccaglini-Frank, Mariotti, Antonini, 2009; Fischbein, 1993; Mariotti, 1996). Sono, quindi, le connotazioni concettuali a definire le restrizioni entro cui gli aspetti figurali possono subire modificazioni. Talvolta la doppia natura delle figure geometriche può creare delle difficoltà negli studenti; per facilitare l'apprendimento del

rapporto tra proprietà invarianti e varianti sono stati introdotti nella pratica scolastica alcuni software, come Cabri geometrie, che permettono di operare sulle figure tutte le trasformazioni consentite dalla definizione (Baccaglini- Frank, Mariotti, Antonini, 2009; Mariotti, 1996; Marrades, Gutierrez, 2001). Rispetto ai cambiamenti figurali delle forme geometriche, Duval (1995, 1999, 2006) ha identificato tre tipologie di operazioni visive da applicare alle figure iniziali al fine di esplorarle ed di individuarne le caratteristiche:

- la trasformazione mereologica, che consiste nello scomporre la forma iniziale nelle sottofigure di cui si compone (figura 2, prima riga);
- la trasformazione ottica è data dal rendere più stretta o più larga la forma geometrica presentata, come se venissero usate delle lenti per guardarla oppure come se questa fosse posizionata in uno spazio tridimensionale (figura 2, seconda riga);
- la trasformazione del piano costituisce un cambiamento debole che implica l'orientamento delle figure nel piano di rappresentazione rispetto ad un osservatore ed influenza il riconoscimento dell'ampiezza degli angoli.



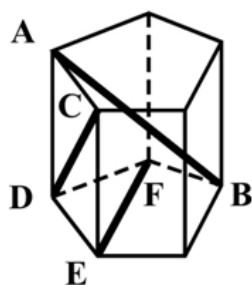
**Figura 2.** La figura (in accordo con Duval, 1999) rappresenta due tipi di trasformazione: la trasformazione mereologica (in alto) e la trasformazione ottica (in basso). Non vengono forniti esempi rispetto al terzo tipo di cambiamento in quanto si tratta di una leggera alterazione della figura iniziale.

Due abilità spaziali risultano essere fondamentali nei processi di visualizzazione implicati nelle trasformazioni di figure geometriche (Gardner, 1983): la capacità di manipolare l'orientamento



spaziale, che consiste nel comprendere e nell'operare sulla relazione tra le posizioni degli oggetti nello spazio in riferimento alla propria posizione, e la capacità di visualizzazione spaziale, che è data dalla comprensione e dal prefigurare i movimenti immaginati degli oggetti in uno spazio bi-tri- dimensionale (Bishop, 1980; Harris, 1981; McGee, 1979).

La capacità di modificare le proprietà delle figure geometriche e le sottostanti abilità che tale processo implica sono fondamentali in compiti geometrici che coinvolgono sia alterazioni di forma, di dimensioni delle forme iniziali sia modifiche relative alla dimensione spaziale, quali l'orientamento degli oggetti nello spazio e le relazioni tra le loro posizioni. La visualizzazione, infatti, risulta essere centrale anche nella manipolazione dello spazio che consiste nell'abilità di utilizzare differenti piani di rappresentazione spaziale per scoprire le peculiarità caratterizzanti una determinata figura (Gutiérrez, 1996a, 1996b; Gutiérrez, Pegg, Lawrie, 2004; Hershkowitz, 1990). Gli studi che hanno enfatizzato l'importanza di questa capacità nella soluzione di un compito geometrico, ne hanno altresì messo in evidenza le difficoltà incontrati dagli studenti nel momento in cui la situazione richiede il passaggio da uno spazio bidimensionale ad uno tridimensionale e viceversa (Herbst, 2006; Unal, Jakubowski, Corey, 2009). La rilevanza di continui spostamenti tra spazi costituiti da differenti dimensioni è evidente in un esempio di Gutierrez et al. (2004), in cui la richiesta era data dal disegnare tutte le diagonali di un prisma; al fine di riuscire ad identificarle tutte è necessario passare da uno spazio tridimensionale ad uno bidimensionale prendendo in esame le diverse facce di cui si compone la figura originale.



**Figura 3.** La figura mostra un prisma in cui sono state disegnate alcune delle diagonali. Per poterle individuare tutte, è necessario utilizzare differenti piani di rappresentazione spaziale, come mostrato dalla figura tratta da Gutierrez,Pegg, Lawrie, 2004.

L'enfasi che gli studi riguardanti l'apprendimento geometrico pongono sulle abilità di manipolazione figurale sembra collimare con l'importanza attribuita dalla psicologia della Gestalt alla percezione; tuttavia le operazioni coinvolte nel processo di visualizzazione vengono concepite dalla maggior parte delle ricerche qui presentate non come aventi luogo a livello percettivo ma si collocano ad un livello leggermente superiore, così come precisato da Duval (1999) in cui differenzia la visualizzazione dalla semplice percezione.

### **1.5 L'importanza della rappresentazione nell'insight problem solving.**

Le componenti rappresentativo-figurali risultano essere rilevanti anche nella soluzione di problemi di insight (insight problems); la cui soluzione presenta determinate caratteristiche: è accompagnata da un'esperienza di "Aha!" (Bühler, 1907), è improvvisa nella sua apparizione (Bowden et al., 2005; Jung-Beeman et al., 2004; Novick & Sherman, 2003), non compresa (Wegner, 2002) e non avviene mediante passaggi consecutivi (Metcalf, 1986a, 1986b; Metcalf & Wiebe, 1987). Gli studi, che si sono occupati di insight problem solving, hanno messo in luce che per risolvere tali problemi è necessario un processo di ristrutturazione consistente in un cambiamento dell'iniziale rappresentazione del problema (Knoblich, Ohlsson, Haider, & Rhenius, 1999; Knoblich, Ohlsson, & Raney, 2001; Luo, Niki, & Knoblich, 2006; Öllinger, Jones & Knoblich, 2006, 2008; Wu, Knoblich & Luo, 2012). Tuttavia in molti casi ciò risulta difficile; i problem solvers alla ricerca di una possibile soluzione a questi problemi incontrano molti ostacoli che appaiono impossibili da superare, sperando pertanto una fase di impasse che impedisce loro di vedere la soluzione del problema. Tale situazione è causata dal fatto che nel momento in cui un solutore si trova di fronte ad una situazione problematica, egli cerca di dare senso alla nuova situazione utilizzando la conoscenza passata che porta alla creazione di un'iniziale e spesso fuorviante rappresentazione del problema da affrontare. L'iniziale immagine della nuova situazione problematica da affrontare potrebbe evidenziare determinate componenti, attivate mediante l'applicazione di quanto appreso in precedenza (ad esempio attraverso l'utilizzo di analogie, concetti, idee, operatori, principi, regole,

schemi, abilità, ecc.), che possono portare all'inibizione o alla soppressione di componenti conoscitivi che invece potrebbero essere essenziali per la soluzione. Affinché si attui un cambiamento dell'iniziale rappresentazione del problema è necessaria l'attivazione di due meccanismi cognitivi: il rilassamento dei vincoli che limitano lo spazio entro cui la soluzione è cercata (*relaxation of constraints*) e la scomposizione di pattern percettivi familiari (*chunk decomposition*; Knoblich, Ohlsson, Haider, & Rhenius, 1999; Knoblich, Ohlsson, & Raney, 2001; Luo, Niki, & Knoblich, 2006; Öllinger, Jones & Knoblich, 2006, 2008; Wu, Knoblich & Luo, in press). Il primo consiste nel disattivare alcuni elementi conoscitivi che sono stati attivati e che pertanto agiscono come vincoli sulle opzioni inizialmente considerate. Ci sono differenti livelli di disattivazione dei vincoli dipendenti dalla dimensione dello scopo collegato ad un determinato vincolo da rilassare: se questo possiede un obiettivo coinvolto in molti ambiti, la probabilità che il vincolo venga disattivato è bassa perché il processo implica cambiamenti più globali e profondi nella rappresentazione della conoscenza; al contrario se il vincolo è connesso ad uno scopo implicato in pochi domini, la probabilità che venga rilassato è alta perché il processo è locale e periferico rispetto al primo. Diversamente, la scomposizione dei chunks consiste nella separazione delle componenti che costituiscono un chunk percettivo, che si viene a formare nel momento in cui la familiarità con una classe di oggetti o di eventi porta alla creazione di pattern che catturano ricorrenti costellazioni di caratteristiche o componenti (*chunk*). In questo caso la difficoltà di rottura di un chunk è data dalla resistenza del legame tra i membri costituenti il raggruppamento (*chunk*); si distinguono quindi chunk deboli (*loose chunks*), le cui componenti sono esse stessi dei pattern percettivi significativi (*chunks*) e risultano pertanto facili da separare, e chunk resistenti (*tight chunks*), le cui unità non rappresentano esse stesse dei chunk e quindi sono difficili da rompere. Tali ricerche hanno investigato l'influenza di due meccanismi cognitivi sottostanti al processo di cambiamento di rappresentazione utilizzando situazioni problematiche comprendenti problemi aritmetici (*matchstick arithmetic problem*), il cui compito richiede di trasformare una falsa equazione, scritta in numeri romani (I, II, IV, V, X, ecc.) con l'introduzione dei segni degli

operatori aritmetici (+, -) e il segno uguale, in una vera equazione, muovendo solamente un unico bastoncino.

$$\begin{array}{c} \text{IV} = \text{III} + \text{III} \\ \text{VI} = \text{III} + \text{III} \end{array}$$

**Figura 4.** La figura mostra un esempio di problema aritmetico. In alto viene presentata la situazione problematica costituita da una falsa equazione, costruita attraverso i bastoncini, che deve essere trasformata in una vera equazione. In basso viene invece raffigurata la soluzione consistente nello scomposizione del chunk percettivo che forma il numero romano IV e nel considerare le due unità come elementi separati; in questo il bastoncino che in origine si trovava a sinistra del V viene spostato, nella nuova situazione, a destra.

Nel caso specifico di questo problema, esso scatena la precedente conoscenza aritmetica dei partecipanti, quindi le componenti problemiche vengono codificate in termini di chunks e vincoli (constraints): i singoli elementi percettivi vengono raggruppati in pattern percettivi familiari permettendo di cogliere visivamente i numeri, gli operatori aritmetici e l'uguale; le unità problemiche innescano una serie di conoscenze procedurali aritmetiche che si configurano come vincoli che delimitano lo spazio di ricerca della soluzione. Per risolvere questo problema e in generale gli altri problemi di insight, è necessario un cambiamento di rappresentazione scomponendo i pattern percettivi nei singoli elementi, cioè cogliere dal punto di vista percettivo i singoli bastoncini che costituiscono il numero come unità indipendenti, e rilassando i vincoli legati alle conoscenze e alle procedure aritmetiche, quali ad esempio l'impossibilità di trasformare il segno uguale in un operatore aritmetico, che sono state attivate nel momento in cui il problema viene posto (Knoblich, Ohlsson, Haider, & Rhenius, 1999; Öllinger, Jones, & Knoblich, 2006). Lo studio dei movimenti oculari ha anche messo in evidenza che durante il processo di cambiamento di rappresentazione avviene un passaggio di distribuzione dell'attenzione rivolta agli elementi problemici: dal focus su quelli che sono inutili al rilievo assunto da quelli che sono utili per

risolvere il problema presentato (Knoblich, Ohlsson, & Raney, 2001). Gli studi che si sono occupati di questa tematica, si sono focalizzati anche sul rapporto tra la tendenza ad applicare determinate strategie prefissate ed utilizzate per risolvere un certo tipo di problemi nella soluzione di problemi simili, mental set, e l'insight, sottolineando un interscambio tra questi (Öllinger, Jones, & Knoblich, 2008). In specifico, negli esperimenti condotti utilizzando una serie di problemi differenti, composta da problemi che non richiedono un insight (non insight problems) e da problemi in cui è necessario un cambiamento di rappresentazione attraverso la scomposizione di chunks o il rilassamento dei vincoli, è stato evidenziata l'esistenza di un'asimmetria nell'interazione tra mental set e insight. Gli effetti del primo meccanismo sono stati trovati nel momento in cui i problemi nella serie utilizzata richiedevano per poterli risolvere un cambiamento di rappresentazione diverso da quello utilizzato per risolvere i problemi target. Al contrario, non ci sono influenze di questo tipo nel momento in cui i problemi nella serie richiedevano l'applicazione di conoscenze apprese in precedenza per risolverli. I risultati di questi studi suggeriscono, quindi, che l'apprendimento di una nuova procedura di soluzione per insight e successivamente rinforzata, sopprime l'insorgenza di altri processi di soluzione alternativi, necessari per risolvere i problemi successivi; di conseguenza le procedure alternative non hanno la possibilità di superare la soglia della consapevolezza (Öllinger, Jones, & Knoblich, 2008). Tali ricerche non hanno solamente chiarito il funzionamento dell'attivazione/ disattivazione di vincoli procedurali, ma hanno anche evidenziato i meccanismi mentali e cognitivi sottostanti la scomposizione di chunks percettivi (Luo, Niki, & Knoblich, 2006; Wu, Knoblich, & Luo, in press). Nella rottura di un pattern percettivo sono coinvolti processi visivi; in particolare per scomporre un chunk l'area visiva superiore deve essere disconnessa dall'input fornito dal primario processamento visivo al fine di permettere alle semplici caratteristiche di essere riorganizzate in differenti chunks percettivi (Luo, Niki, & Knoblich, 2006). Il processo di scomposizione di chunks percettivi è, inoltre, influenzato in maniera differente dall'intervento di due meccanismi cognitivi: la familiarità dei chunks (chunk familiarity), dipendente dal possesso di una maggior o minor intima conoscenza dei pattern percettivi coinvolti nel problema, e la resistenza

dei chunks (chunk tightness), collegata al fatto che le componenti di un dato chunk siano raggruppati in maniera forte o debole (Wu, Knoblich, & Luo, in press). I risultati degli studi condotti hanno messo in luce che gli impedimenti posti dalla familiarità dei chunk nella scomposizione di pattern percettivi possono essere superati inibendo i significati familiari connessi ai chunk coinvolti; mentre il superamento degli ostacoli dovuti alla resistenza del legame dei chunks richiede un processamento visivo- spaziale.

In sintesi, le ricerche contemporanee qui prese in esame hanno messo in luce che il processo di soluzione coinvolto nei problemi di insight, definito con il termine insight problem solving, implica un processo di ristrutturazione consistente in un cambiamento dell'iniziale rappresentazione del problema, che risulta essere la causa principale dell'impasse incontrato dai solutori. Affinché il problema venga risolto, quindi, è necessario agire sulla rappresentazione iniziale del problema che pone in evidenza elementi conoscitivi che possono ostacolare e sopprimere l'insorgere di rappresentazioni alternative che sono di aiuto nella soluzione del problema. Questo è possibile grazie all'intervento di due meccanismi cognitivi: la scomposizione dei chunks percettivi in cui gli elementi problematici vengono raggruppati e la disattivazione di vincoli conoscitivo- procedurali che limitano lo spazio di ricerca della soluzione. Il processo di soluzione è pertanto dovuto ad un cambiamento rappresentativo e non all'applicazione di un'euristica (Öllinger, Jones, Faber, & Knoblich, 2012); questo risulta essere in linea non solo con la teoria del cambiamento di rappresentazione (Representational Change Theory, RCT), di cui gli studi presentati si fanno portavoce, ma anche con la teoria gestaltica, secondo la quale il processo di soluzione implica un processo di riorganizzazione delle proprietà fenomenico- percettive del problema.

## **1.6 L'importanza dei processi percettivo- figurali nel ragionamento logico.**

A questo punto comparando il processo di ragionamento coinvolto nella soluzione di problemi logici e matematici e i processi di pensiero appena descritti (pensiero produttivo, apprendimento geometrico, insight problem solving) sembra riproporsi la famosa “controversia

immagini/proposizioni” (Vecchio, 1992, p. 28) relativa alla forma assunta dai processi cognitivi di elaborazione e di rappresentazione che caratterizzano l’attività mentale in generale e di conseguenza anche il ragionamento. In questo dibattito c’è chi come Kosslyn (1983, 1994) sostiene il ricorso all’immagine mentale, considerandola il punto di partenza dei processi di elaborazione di cui l’attività cognitiva è costituita; al contrario Pylyshyn (1973) ed altri sostengono l’ipotesi proposizionalista, secondo la quale, l’input è dato una descrizione. Infine c’è chi preferisce optare per un sistema rappresentazionale o un modello che le includa entrambe (Anderson, 1978; Johnson-Laird, 1983; Paivio, 1971). Un’esemplificazione di quest’ultima posizione è data «dall’Ipotesi del Doppio Codice» di Paivio (1971, 1986), secondo la quale le immagini e le strutture verbali costituiscono due modalità di codifica attraverso cui viene elaborata l’informazione, ciascuno avente caratteristiche proprie e propri processi elaborativi. Le unità di rappresentazione di base per l’informazione non verbale e verbale vengono denominate rispettivamente *imagens* e *logogens* (Paivio, 1986); i sistemi ed i processi che li caratterizzano riflettono le proprietà degli elementi costitutivi: il sistema verbale è organizzato in reti di associazione, ossia la probabilità di attivazione di un elemento deriva dalla natura verbale dello stimolo. I processi di elaborazione che hanno luogo in questo sistema sono di tipo sequenziale- analitico. Viceversa l’elaborazione nel sistema non verbale è parallela, opera su strutture in cui si mantiene una relazione di analogia con ciò che è rappresentato. Il vantaggio mnestico degli stimoli evocanti un’immagine mentale (Paivio, 1965, 1971; Shepard, 1967) è costituito dal fatto che questi rimandano ad una rappresentazione in entrambi i codici, rendendoli facilmente disponibili per il successivo recupero. È in questo senso che si parla appunto di doppia codifica (Paivio, 1986). La commistione tra aspetti proposizionali e pittorici caratterizza anche la natura delle immagini mentali (Cohen & Kubovy, 1993; Kosslyn, 1975, 1983; Kosslyn, Ball, & Reiser, 1978; Pessa, Contreras, & Penna, 1992; Shepard, 1967; Shepard & Metzler, 1971; Shepard & Cooper, 1982; Standing, 1973; Tarr & Pinker, 1989): esse, infatti, sono costituite in parte da rappresentazioni di tipo geometrico e in parte da rappresentazioni di tipo verbale. Il carattere multimodale del sistema di rappresentazione delle conoscenze, prodotto

cioè dell'interazione, a livello cognitivo, dei codici di elaborazione di materiale figurale e verbale di materiale testuale, e, a livello fenomenico, degli strumenti di rappresentazione pittorica di organizzatori grafici e proposizionale di organizzatori testuali, è stato assunto come presupposto di uno studio condotto riguardante le mappe concettuali, in cui è stato messo in luce l'esistenza di uno spazio cognitivo dalla forma e dai confini definiti (Grudina, Burro, Savardi, 2009).

Lo stretto rapporto tra codici di elaborazione pittorica e proposizionale è alla base anche dei processi di ragionamento coinvolti nella soluzione di problemi. Partendo dalla constatazione del carattere contro- intuitivo del sistema assiomatico che costituisce il corpo di conoscenze matematiche e del sospetto, dominante il diciannovesimo e il ventesimo secolo, circa l'affidabilità delle intuizioni visive che ha spostato il focus dei matematici e dei filosofi matematici sul modo di giustificare gli assiomi e le regole inferenziali valevoli all'interno del complesso assiomatico rilevante, Giaquinto (2007) ha mostrato lo stretto connubio esistente tra pensiero visivo e matematico enfatizzando la pervasività e l'onnipresenza di processi visivi in matematica. Questo è testimoniato dal fatto che il pensiero visivo, consistente nell'utilizzo di immaginazione visiva o nella percezione esterna di diagrammi è largamente diffuso in tutte le attività matematiche, in tutti i temi e a tutti i livelli. Le immagini visive o i diagrammi, infatti, possono illustrare figurativamente i casi implicati in una definizione, fornendo in questo modo una più vivida comprensione delle sue applicazioni; possono inoltre aiutare a comprendere la descrizione di una situazione matematica o i vari passaggi coinvolti in un processo di ragionamento; essi, infine, possono suggerire una proposizione da investigare o un'idea da dimostrare. La visualizzazione in matematica non ha solamente un ruolo di facilitatore ma assume anche un valore epistemologico portando alla scoperta di nuove idee da investigare. La giustificabilità epistemologica di una scoperta nata dall'immaginazione visiva o dalla percezione deriva dal fatto che essa è afferrata e compresa in maniera indipendente da parte di un individuo e dall'affidabilità del modo attraverso cui una determinata credenza si è formata senza violare la razionalità epistemica. L'acquisizione di una conoscenza attraverso la percezione può essere considerato affidabile in quanto consiste nel fare



riferimento ad oggetti o a proprietà fisiche e nel dipendere dalle capacità sensoriali degli individui e dalla loro funzione di produzione dell'informazione; per questi motivi l'affidabilità della percezione può essere considerata un *a priori* (Burge, 1993). La valenza epistemica delle scoperte e delle informazioni acquisite percettivamente non viene negata dal mancato possesso di una giustificazione (Burge, 1993; Giaquinto, 2007), in quanto il diritto epistemico di credere in una conoscenza percettiva non richiede l'essere in grado di giustificare l'affidabilità delle risorse attraverso cui si è venuta a formare (Burge, 1993); pertanto in matematica una scoperta senza giustificazione è almeno concettualmente possibile (Giaquinto, 2007). L'ancoramento del sapere matematico nell'esperienza senso- motoria è ampiamente sottolineato dalla proposta di Lakoff e Nunez (2005). Essi, infatti, ritengono che la matematica così come viene conosciuta e studiata dagli esseri umani non costituisca un sapere trascendentale, formato da un sistema simbolico astratto, ma si tratta di una "*matematica umana*", frutto cioè dei cervelli e delle menti degli individui che esperiscono fisicamente e attraverso i sensi l'ambiente in cui si trovano a vivere; essa pertanto risulta essere un sapere *embodied* (Lakoff & Nunez, 2005), comprendente concetti e ragionamenti strutturati dai corpi, dai cervelli degli esseri viventi e dal loro funzionamento quotidiano nel mondo. Centrale nel ragionamento matematico è l'utilizzo di metafore concettuali (Lakoff & Nunez, 2005), attraverso le quali vengono concettualizzati e compresi i concetti astratti in termini concreti. Le metafore concettuali rappresentano un meccanismo cognitivo che permette di ragionare su un tipo cose come se fosse un altro, mediante l'applicazione delle conoscenze possedute in un determinato ambito nel ragionamento riguardante un altro ambito. La presenza di metafore concettuali, derivanti dell'esperienza quotidiana degli individui, arricchisce il sapere matematico, caratterizzato da una stratificazione di metafore concettuali, ma può causare confusione e paradossi se esse non vengono chiarite o vengono considerate nel loro significato letterale. Di conseguenza mostrare e rivelare la loro struttura cognitiva e la loro natura esperienziale permette di rendere la matematica più comprensibile e più facilmente accessibile (Lakoff & Nunez, 2005).

La concettualizzazione di concetti astratti in termini concreti, su cui si fonda la metafora concettuale, mediante la manipolazione di aspetti visivo-figurali risulta facilitare la soluzione di problemi (Antonietti, 1994, 2001; Antonietti, Angelini, Cerana, 1995; Vallee-Tourangeau, Pyton, 2008; Weller, Villejoubert, & Vallee-Tourangeau, 2011). La rappresentazione visiva delle situazioni problematiche è particolarmente efficace in quanto permette di tradurre in immagine la situazione problematica rendendola maggiormente aderente alla realtà e facilmente manipolabile. Le immagini mentali, infatti, consentono di riprodurre in forma schematica il problema, mettendo in evidenza le caratteristiche principali e secondarie e di visualizzare dettagli e relazioni che difficilmente vengono messi in evidenza nella formulazione linguistica del problema presentato. Questa trasformazione figurale consente di operare sulle proprietà problematiche, combinando in maniera differente gli elementi di cui il problema si compone, modificando alcune componenti e creando collegamenti con situazioni problematiche aventi una struttura simile al problema affrontato. La flessibilità delle immagini porta, inoltre, alla visualizzazione anticipatoria delle situazioni che si vengono a creare dopo le modifiche operate consentendo la prefigurazione di possibili alternative da perseguire che altrimenti rimarrebbero nascoste.

Nonostante, quindi, la situazione da affrontare si configuri come problema logico in cui non compaiono aspetti visivi, la cui soluzione richiede un processo di ragionamento consistente nel processamento di proposizioni linguistiche o di simboli, in cui vengono coinvolte diverse abilità cognitive, ad eccezione della percezione. In realtà, come evidenziato sopra, il ragionamento logico implicato nella soluzione di questa tipologia di problemi presenta processi elaborativi richiamanti l'importanza di un pensiero visivo comprendente la rappresentazione e la codifica visiva degli elementi problematici, sottolineando lo stretto connubio esistente tra codici di elaborazione proposizionale.

## **CAPITOLO SECONDO**

### **GLI ERRORI DEL RAGIONAMENTO**

I processi di ragionamento/pensiero coinvolti nella soluzione di problemi (ragionamento logico e pensiero visivo) trattati nel capitolo precedente intervengono nella soluzione di situazioni problemiche differenti e possiedono meccanismi di funzionamento diversi. Nonostante la diversità dei due processi di problem solving, è stato messo in luce lo stretto rapporto esistente tra il codice di elaborazione proposizionale e quello di elaborazione pittorica implicati nella ricerca di soluzione, enfatizzando l'importanza della rappresentazione visiva e della manipolazione, attraverso l'utilizzo di immagini mentali, di proprietà problemiche nella comprensione e nella soluzione di problemi logici, caratterizzati cioè da simboli, come quelli matematici, o da proposizioni linguistiche.

Un altro elemento che accomuna queste due tipologie di problem solving è costituito dalla loro fallacia. In effetti essi non sono due processi lineari, ma fallibili d'errore; in ciascuno, infatti, è possibile incontrare errori differenti. Questo capitolo sarà pertanto dedicato alla presentazione degli errori connessi al ragionamento logico e al pensiero visivo.

#### **2.1 Le fallacie del ragionamento logico**

Molte ricerche psicologiche hanno suggerito che le capacità di ragionamento degli esseri umani sono piuttosto scarse e che gli uomini incorrono molto spesso in errore (Mercier & Sperber, 2011). Le varie tassonomie riguardanti la classificazione delle diverse tipologie di errore (Rasmussen, 1982; Norman, 1981; Reason, 1990; Sellen, 1990) sono concordi nell'utilizzare questa etichetta per identificare tutte quelle situazioni in cui esiste una non corrispondenza tra l'intenzione di eseguire un atto e l'esecuzione dello stesso. La mancata corrispondenza caratterizza anche gli errori che si possono compiere nell'affrontare situazioni problemiche (Legrenzi & Sonnino, 1999; Mosconi, 1999). Nel caso del problema, determinato dalla relazione tra certi fatti e lo scopo degli individui (Mosconi, 1999), la discrepanza si verifica tra il messaggio dato, costituito dal testo del problema considerato in sé prima della ricezione da parte degli esseri umani, e il messaggio ricettivo,

comprendente il testo così come viene recepito ed elaborato dagli individui. In queste situazioni, caratterizzate dalla diversità tra testo elaborato da parte dell'individuo, mediante l'applicazione di conoscenze, regole e modelli mentali di cui il solutore risulta essere in possesso, e testo originale, avvengono gli errori che impediscono la soluzione del problema. Dal momento che il processo inferenziale caratterizzante il ragionamento induttivo e deduttivo può essere visto come un percorso contraddistinto da diversi passaggi (cfr *paragrafo 1.1*), gli errori del ragionamento possono essere considerati come una successione di passi in cui uno o più dei quali è errato e pertanto il percorso seguito non risulta essere valido (Giaretta, 2007). L'intuizione della validità o meno di un processo inferenziale è connessa con i concetti di verità e di falsità implicati nell'applicazione di regole che portano alla generazione di una conclusione; di conseguenza per distinguere un processo di ragionamento valido da uno invalido si deve discriminare tra la buona e la cattiva riuscita di un processo di applicazione della regola (Giaretta, 2007). In seguito a tale distinzione, la cattiva applicazione della regola, che determina l'insorgenza di errori è data dalla discrepanza tra la pianificazione dell'applicazione della regola e l'effettiva applicazione, in cui per qualche motivo ciò che era stato pianificato non è stato portato a termine (Giaretta, 2007). Questo può essere determinato dal fatto che determinati processi sottostanti all'elaborazione della rappresentazione che un individuo si crea nel momento in cui si trova ad affrontare una situazione problematica in cui si richieda la produzione di un'inferenza abbiano portato alla pianificazione di azioni o di passaggi che si rivelano inadeguati per il raggiungimento degli obiettivi che si intende perseguire con il ragionamento. Infine l'errore può essere causato dalla disponibilità delle risorse possedute nel momento in cui viene applicata una regola (Giaretta, 2007). La disponibilità, intesa come accessibilità e attivazione, di risorse pertinenti per la regola da applicare permette il raggiungimento dello scopo che ci si è prefissati di perseguire mediante il processo di ragionamento; la mancata attivazione di risorse pertinenti comporta l'insuccesso del processo di ragionamento e di conseguenza il mancato raggiungimento dell'obiettivo. In accordo con l'interpretazione di Giaretta (2007), è possibile interpretare gli errori connessi al ragionamento induttivo e deduttivo come una

deviazione dalla corretta applicazione della regola; alcuni dei quali causati da un determinato modo di elaborare l'informazione che ha portato alla costruzione di un'erronea rappresentazione del problema da affrontare. La fallacia della congiunzione (Tversky e Kahneman, 1983), connessa alla creazione di associazioni tra diversi concetti applicando l'euristica della rappresentatività che consiste nel considerare un evento un caso tipico della categoria di cui fa parte, ne rappresenta un esempio. Si prenda per esempio il classico problema di Linda (Tversky e Kahneman, 1983), la cui formulazione è la seguente: *“Linda ha 31 anni, è single, estroversa, e molto brillante. Ha una laurea in filosofia. Da studentessa è stata molto impegnata nel movimento per i diritti sociali, contro la discriminazione, e contro il nucleare”*; ai partecipanti venivano fornite alcune ipotesi, da ordinare per probabilità, riguardanti il possibile impiego di Linda. Nella lista comparivano, tra le altre ipotesi, *“è un'impiegata di banca”* e *“è un'impiegata di banca femminista”*; la maggior parte dei partecipanti attribuì maggior probabilità a *“è un'impiegata di banca femminista”* piuttosto che a *“è un'impiegata di banca”*. Secondo Tversky e Kahneman (1983) la scelta effettuata dai partecipanti è stata dettata dall'euristica della rappresentatività, secondo la quale il profilo di Linda è più simile ad un'impiegata di banca femminista rispetto a quello di una semplice impiegata; di conseguenza alla prima opzione viene attribuita una probabilità più alta rispetto alla seconda. Tale comportamento può essere spiegato mediante la teoria del supporto (Bonini, Tentori, & Osherson, 2004; Rottenstreich, Tversky, 1996; Tentori, Bonini & Osherson, 2004; Tversky, Koehler, 1994), il cui assunto fondamentale è dato dalla superadditività dei giudizi di probabilità assegnati alle singole componenti di un'ipotesi disgiuntiva, consistente nella descrizione o nella rappresentazione mentale di un evento che equivale alla somma di due o più altri eventi in cui vengono rese esplicite le sue componenti, rispetto alla probabilità dell'ipotesi disgiuntiva implicita. Per esempio, l'evento *“ospedalizzazione per qualsiasi ragione”* è un'ipotesi disgiuntiva implicita che potrebbe essere resa esplicita enumerando tutte le possibili cause di ospedalizzazione di cui l'evento è composto; tra le possibili cause si potrebbero citare queste due: *“ospedalizzazione per incidente o per malattia”*. La superadditività si verifica nel momento in cui *“ospedalizzazione per incidente o per malattia”*

ottiene una probabilità più alta rispetto all'opzione "ospedalizzazione per qualsiasi ragione", così come è avvenuto nell'esperimento condotto da Johnson et al. (1993). Questo tipo di errore deriva dal fatto che le persone non giudicano l'evento in base alla descrizione che viene fornita, ma sulla base della loro rappresentazione dell'evento in una sua manifestazione tipica (Tversky & Kahneman, 1994). Un altro errore commesso applicando l'euristica della rappresentatività è dato dalla fallacia delle frequenze di base (Kahneman, Tversky, 1972, 1973; Tversky, Kahneman, 1982). Un esempio di questa tipologia di errore è rappresentato dalle risposte che i partecipanti hanno fornito a questo problema: "*W. è un ragazzo minuto, molto sensibile, amante della poesia, piuttosto timido, non portato per gli sport. Ritenete più probabile che sia uno studente di lingue orientali o di economia e commercio?*" (Kahneman, Tversky, 1972, 1973). La maggior parte delle persone, affidandosi all'euristica della rappresentatività, ha ritenuto più probabile che W. fosse uno studente di lingue orientali, in quanto il suo profilo risultava essere maggiormente somigliante a quello di uno studente di lingue orientali. Nonostante la superiorità numerica degli iscritti ad economia e commercio, il confronto tra l'idea di uno studente tipo di economia e l'idea di uno studente tipo di lingue orientali porta le persone a ritenere che il profilo di W. sia maggiormente riscontrabile tra i profili degli studenti di lingue orientali rispetto ai profili di economia e commercio. In base a queste conoscenze, la frequenza di studenti di economia simili a W. è circa il doppio della frequenza di studenti di lingue orientali simili W.; pertanto i partecipanti, in base a queste informazioni, avrebbero dovuto rispondere che era più probabile che W. fosse uno studente di economia, hanno preferito basarsi su una stima di tipicità, affermando la maggior probabilità che W. fosse uno studente di lingue orientali (Kahneman, Tversky, 1972, 1973; Tversky, Kahneman, 1982).

Tra gli errori connessi al processo di ragionamento impegnato in compiti sillogistici vi è l'accettazione di determinate forme di sillogismo condizionale che sono invalide per i condizionali semplici, dei quali rispecchiano la struttura, ma valide seguendo i principi che governano le forme bicondizionali (Evans, 1995; Evans, Clibbens & Rood, 1995, 1996; Johnson-Laird, 1999; Johnson-

Laird, Byrne, 2002). Una di queste forme è data dalla fallacia di affermazione del conseguente (AC):

se p allora q

q

Quindi, p;

mentre l'altra è rappresentata dalla fallacia di negazione dell'antecedente (NA):

se p allora q

non p

Quindi, q.

L'attività del ragionamento deduttivo è inoltre caratterizzata dall'azione di bias e dall'applicazione di solide euristiche che possono portare all'insorgenza di errori nel processo di soluzione di problemi. Rappresentativo di questi ultimi casi è il bias di conferma, che consiste nella ricerca e nell'interpretazione di evidenza a favore delle credenze, delle aspettative o delle ipotesi possedute da un individuo (Nickerson, 1998). Il bias di conferma può essere considerata una delle cause di errore nella soluzione di problemi sillogistici. Secondo la teoria dei modelli mentali (Evans, Handely, Harper, Johnson-Laird, 1999; Johnson-Laird, 1983; Johnson-Laird & Bara, 1984; Johnson-Laird & Byrne, 1991) il processo deduttivo richiesto si compone di tre passaggi: la formazione di un modello mentale, in cui il ragionatore si crea un modello iniziale del problema presentato a partire dalle premesse iniziali; la formazione di una conclusione, in cui il solutore trae una possibile conclusione dal modello creato; e la validazione della conclusione, in cui il ragionatore deve andare alla ricerca di contro- esempi rispetto alla risposta derivata e se questi non esistono la conclusione trovata può considerarsi valida. Molto spesso, però, il solutore impegnato nella soluzione di un sillogismo, anziché andare alla ricerca di esempi contrari rispetto alla risposta individuata, cerca informazioni che confermano l'ipotesi avanzata (Evans, Handely, Harper, Johnson-Laird, 1999; Johnson-Laird, 1983; Johnson-Laird & Bara, 1984; Johnson-Laird & Byrne, 1991). La ricerca di evidenze o di conferme delle ipotesi formulate è presente anche nel momento in

cui si deve verificare un'ipotesi (hypothesis testing performance), indagato per esempio nel compito di scoperta della regola di Wason (Wason, 1960) e nel compito di selezione di Wason (Wason, 1966). In quest'ultimo caso i partecipanti, a seguito dell'enunciazione di una regola che descrive le quattro carte presentate (*“Se c'è una vocale su un lato, poi c'è un numero pari sull'altro”*) devono indicare quali carte girare al fine di verificare la veridicità della regola. L'attenzione dei partecipanti, in questo caso, si focalizza sulle caratteristiche evidenziate sia dalla regola che dal contesto (Giroto et al. 2001; Sperber et al. 1995) portando alla formulazione di una prima ipotesi rispetto alla risposta da fornire; successivamente i partecipanti si impegnano in un processo di ragionamento volto alla ricerca di giustificazioni delle loro iniziali intuizioni e non mirante ad una loro correzione (Evans, 1996; Lucas & Ball, 2005; Roberts & Newton, 2001). Il bias di conferma agisce anche nelle situazioni in cui il ragionamento è finalizzato alla produzione di argomenti aventi lo scopo di persuadere gli interlocutori; in queste situazioni le persone cercano di convincere gli altri andando alla ricerca di argomenti e di evidenze che confermano le proprie affermazioni, ignorando le argomentazioni sfavorevoli. Il bias di conferma, infine, spinge le persone a non cercare informazioni contrarie rispetto alle credenze possedute sulla base di percezioni o di ricordi mnestici nel momento in cui non sussistono le condizioni per intraprendere un processo di verifica di quanto ritenuto vero (Mercier & Sperber, 2011).

Vi sono, infine, altri errori, interpretabili come situazioni in cui viene meno la corrispondenza tra due stati di cose, che caratterizzano il processo di ragionamento utilizzato nella produzione e nella valutazione di argomenti prodotti in compiti inferenziali. Tali errori vengono definiti come “fallacie del ragionamento informale” (Hahn, Oaksford, 2007; Neuman, 2003; Neuman, Weinstock, & Glasner, 2006). Essi, infatti, risultano essere argomenti che psicologicamente sono persuasivi ma logicamente sono sbagliati (Copi & Burgess-Jackson, 1996). Le fallacie tipiche che caratterizzano le varie attività in cui il ragionamento è coinvolto sono: l'argomento derivante dall'ignoranza, costituito da un argomento in cui la conclusione riguardante la verità o l'esistenza di una proposizione “A”, deriva dal fatto che non si conosce la falsità di “A”; l'argomento circolare o

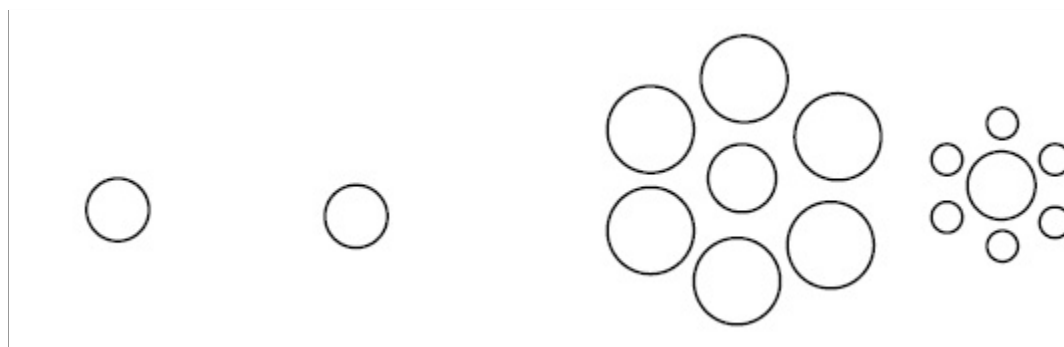


*“petitio principii”*, consistente in un argomento derivato dal principio di autorità, in cui la conclusione è già contenuta nelle premesse (per esempio “Dio esiste perché Dio esiste” o “Dio esiste perché la Bibbia dice così e la Bibbia è la parola di Dio”); e l’argomento del pendio scivoloso (slippery slope argument), che appare nella forma di deterrenti e consiste in un argomento consequenziale in cui viene raccomandato un determinato corso di azioni sulla base della percezione delle sue conseguenze.

## **2.2 Gli errori del pensiero visivo.**

Affrontare la tematica degli errori connessi al pensiero visivo significa porsi il problema relativo alla relazione tra vedere e pensare focalizzando l’attenzione sulle questioni relative all’errore dello stimolo (Bozzi, 1972, 1998, 1999; Kanizsa, 1972, 1980; Köhler, 1929b; Masin 1989; Vicario, 1973, 1998, 1999). Si tratta, in specifico, di affrontare la questione relativa ai rapporti tra le conoscenze possedute e quanto risulta essere legato al vedere. Questo rapporto può essere analizzato secondo diverse angolature: una è rappresentata dall’assunzione del punto di vista del pensare chiedendosi quali sono le integrazioni visive presenti nel pensiero, come in parte è stato fatto nella sezione precedente (cfr *paragrafo 1.6*) in cui si è preso in esame il legame tra codici di elaborazione pittorica e proposizionale; mentre l’altra è data dall’analisi di tale relazione ponendosi nell’ottica del vedere e domandarsi quali integrazioni cognitive è possibile riscontrare nel dato percettivo (Bianchi & Savardi, 2007). Dal momento che questo paragrafo è dedicato agli errori legati alla manipolazione di aspetti percettivo- figurali, verrà privilegiata la seconda opzione, cioè assumendo la prospettiva del vedere. Per chiarire che cosa si intende per errore dello stimolo è necessario in primo luogo definire il significato assunto dal termine “vedere” del quale non esiste una definizione unanimemente accettata. Secondo la prospettiva fenomenologico- sperimentale (Bozzi, 1972, 1998, 1999; Kanizsa, 1972, 1980; Köhler, 1929b; Masin 1989; Vicario, 1973, 1998, 1999) che per anni ha alimentato il dibattito riguardante l’errore dello stimolo, la scena visiva è costituita da ciò che si vede così come lo si vede e che pertanto il contenuto della visione sia dato dall’auto-organizzazione diretta, spontanea, naturale che governa la realtà percettiva e gli elementi e le

proprietà da cui essa risulta essere costituita. In accordo con questa definizione una descrizione ingenua, prodotta da una persona che utilizza la propria dotazione sensoriale, di quanto è sotto osservazione non deve contenere l'intrusione del dato di conoscenza, che si verifica nel momento in cui per una serie variegata di fattori si finisce con l'introdurre la descrizione di ciò che si sa al posto o, nella migliore delle ipotesi, accanto a ciò che si vede (Bianchi & Savardi, 2007). L'errore dello stimolo, secondo le parole di Bozzi, viene definito nel modo seguente: «Il modo di dire “errore dello stimolo” fa parte del *gergo da laboratorio* e corre tra coloro che a vario titolo *si occupano di studi sperimentali sulla percezione*. (...) quando novellini – accusati dal loro tutor di aver commesso l'errore dello stimolo – chiedono chiarificazioni, ricevono risposte per lo più sbrigative. È evidente: tu fai l'errore dello stimolo quando di fronte ad una attrezzatura sperimentale fatta per produrre certi stimoli (movimenti, suoni, colori, forme, eccetera) *invece di descrivere ciò che realmente vedi o senti, l'oggetto della tua attuale osservazione, descrivi ciò che sai o immagini di quell'attrezzatura e del suo momentaneo funzionamento*. Questo può accadere anche di fronte a casi estremamente semplici, poniamo una scontata illusione ottica disegnata su un foglio, quando l'osservatore *dice di vedere non ciò che si vede* (e magari sorprende) ma l'esatta distribuzione geometrica delle linee tracciate che *lui sa*” (Bozzi, 1999). Secondo la definizione fenomenologico-sperimentale l'errore dello stimolo è presente nella descrizione in cui viene dichiarata l'uguaglianza dei cerchi presenti non solamente a sinistra ma anche quelli che costituiscono le due configurazioni di destra (cfr. figura 5).



**Figura 5 - La figura rappresenta due cerchi di uguale dimensione a sinistra. A destra vi sono due configurazioni percettive in cui sono inseriti cerchi di uguali dimensioni ma che percettivamente vengono colti come aventi dimensioni diverse (configurazione di Ebbinghaus, 1885).**

L'errore dello stimolo (EdS) non è semplicemente un affare da laboratorio, come molto spesso viene definito, ma riguarda anche i modi attraverso cui si costruisce la conoscenza, dal momento che la percezione rappresenta uno degli strumenti epistemologici che l'uomo possiede per acquisire informazioni (Burge, 1993) e caratterizza quelle situazioni in cui si verifica una mancata corrispondenza tra la descrizione prodotta e l'oggetto della descrizione, una volta stabilite le condizioni o gradi di libertà dell'osservazione (Bianchi & Savardi, 2007; Savardi & Bianchi, 1999). Pertanto, l'EdS nei termini in cui è stato descritto, in cui cioè la descrizione viene integrata di informazioni aggiuntive e non direttamente disponibili nel campo percettivo preso in esame rappresenta solamente una tipologia di errori, che viene identificata con l'etichetta errori di secondo tipo, ma è possibile riscontrare altre situazioni a cui applicare l'etichetta di errore, in quanto caratterizzate da una mancata corrispondenza tra due stati di cose, proprietà qualificante anche gli errori legati al ragionamento logico.

È possibile, quindi, ipotizzare una trasposizione della definizione sopra proposta per identificare gli errori compiuti nel momento in cui ci si trova ad affrontare un problema, la cui soluzione comporti un processo di riorganizzazione delle proprietà fenomeniche che strutturano la situazione problematica. In questi casi, come sottolineato da Wertheimer quando enfatizza il legame tra la struttura del problema e la soluzione corretta (Luchins & Luchins, 1970), si viene a creare un'incongruenza tra le operazioni richieste dall'organizzazione problematica al fine di eliminare le zone di disturbo, create dagli elementi problematici e dalle loro relazioni, e le azioni effettive compiute dai solutori. È possibile, infatti, interpretare in questo modo gli ostacoli, individuati dai gestaltisti, il cui mancato superamento può portare all'individuazione di una soluzione erronea. Le situazioni caratterizzate da fissità (Duncker, 1935/1969) nascono nel momento in cui esiste un'incompatibilità tra il cambiamento necessario per risolvere il problema e la resistenza che la pregnanza delle proprietà fenomeniche del problema oppongono ad operazioni di trasformazione. La peculiarità di determinate caratteristiche che contraddistinguono gli oggetti coinvolti in una situazione problematica, definendone la funzione, possono ostacolare il processo di soluzione

causando l'identificazione di una soluzione sbagliata; esse infatti risultano essere talmente rilevanti nel campo percettivo che impediscono il riconoscimento di altre qualità che connotano gli oggetti in questione determinandone altre modalità di utilizzo (Duncker, 1969), come nel problema delle candele. La pregnanza della stessa struttura fenomenica del problema può causare l'insorgenza di situazioni erronee in cui si registra una discrepanza tra le operazioni necessarie per la soluzione e la situazione problemica; ne è un esempio il problema dei nove punti di Maier (1930). Il compito, in questo caso, consiste nel congiungere tutti i punti mediante quattro linee rette senza mai staccare la matita dal foglio. La disposizione dei punti, che costituisce l'organizzazione del problema, può orientare il processo di soluzione verso la produzione di tentativi errati: i nove punti, infatti, sono infatti posti in modo tale da formare un quadrato delimitando le operazioni compiute per unirli dentro l'area della figura che si è formata; per risolvere il problema è, invece, necessario che le linee si prolunghino oltre lo spazio creato dai punti. Casi di questo genere si verificano anche nelle situazioni in cui compare l'effetto Einstellung (Luchins, 1942, 1946; Luchins, & Luchins, 1950), dove la somiglianza della situazione problemica con problemi affrontati in precedenza richiama le procedure risolutive utilizzate in passato, a scapito di procedimentiolutivi più adeguati e più veloci. Infine, anche i vincoli percettivi e conoscitivo-procedurali che determinano la rappresentazione iniziale che si viene formare quando ci si trova a risolvere gli insight problems (Knoblich, Ohlsson, Haider, & Rhenius, 1999; Knoblich, Ohlsson, & Raney, 2001; Luo, Niki, & Knoblich, 2006; Öllinger, Jones & Knoblich, 2006, 2008; Wu, Knoblich & Luo, 2012) sono fonti di errore, in quanto spingono il solutore a modificare elementi inutili ai fini risolutivi. Le situazioni descritte finora possono essere considerate esempi di errori di descrizione del terzo tipo (Bianchi & Savardi, 2007; Savardi & Bianchi, 1999). Questi ultimi qualificano le descrizioni che pur fondate nell'esperienza percettiva dell'osservatore, risultano essere mancanti delle proprietà più evidenti dell'evento sotto osservazione; nei casi presentati l'esperienza fenomenica del solutore è caratterizzata dall'attenzione verso qualità problemiche pregnanti nella struttura del problema, ma inutili per la soluzione, e dall'omissione di segnali percettivi nascosti nella situazione originale ma

rilevanti per la risoluzione. Oltre alle categorie già presentate si distingue un'altra tipologia di errori di descrizione: gli errori del primo tipo (Bianchi & Savardi, 2007; Savardi & Bianchi, 1999). Questi ultimi comprendono le descrizioni ingenuie di un osservatore nel momento in cui si richiede una descrizione esperta dell'evento sotto osservazione; l'osservatore, cioè, descrive l'evento sotto osservazione così come viene colto dai propri sensi anziché descriverlo seguendo le indicazioni ottenute durante l'addestramento sperimentale e relative alle modalità di osservazione, alle cose da osservare e ai modi di descrizione.

## **CAPITOLO TERZO**

### **IL RUOLO DEI CONTRARI NEI PROCESSI DI RAGIONAMENTO**

Dopo aver presentato gli errori connessi alle due tipologie di problem solving, si prenderà ora in esame il ruolo assunto dai contrari nei processi di ragionamento. Analizzando, in primo luogo, i processi del ragionamento logico, emergerà la centralità di una relazione di contrarietà, alla base dei meccanismi responsabili del loro corretto funzionamento. Dopo averne constatato l'importanza per le funzioni svolte dal ragionamento logico, verrà presa in considerazione, dal punto di vista teorico, l'ipotesi di un meccanismo fondato sulla contrarietà percettiva alla base del funzionamento del pensiero visivo coinvolto nella soluzione di problemi spazio-geometrici.

Prima di addentrarci nella descrizione della rilevanza dei contrari nei processi di ragionamento è necessario chiarire il significato assunto dal termine contrarietà analizzando storicamente l'introduzione di questo costrutto. Il primo ad aver utilizzato tale termine è stato Aristotele parlando dell'organizzazione della realtà in classi di eventi (le *Categorie*, 1989) entro cui si collocano le "cose" del mondo. L'analisi aristotelica può essere considerata un'attenta disamina della scena fenomenica così come viene colta da una persona per mezzo della propria dotazione sensoriale per due ragioni (Savardi & Bianchi, 1996, 1997):

- 1) lo Stagirita individua le Categorie e i nessi organizzativi dell'inclusione categoriale guardando a quelle che egli stesso definisce semplicemente "*cose*" e *determinazioni qualitative delle cose*, che rappresentano gli oggetti della tassonomia;
- 2) perché metodologicamente egli procede accostandosi ai *dati dell'esperienza*, primi rispetto a noi, per arrivare poi ai sommi generi categoriali, primi in sé (partendo, cioè, da un certo cavallo bianco per giungere alla bianchezza o alla cavallinità in generale).

L'organizzazione degli eventi sotto osservazione, delle "cose" secondo Aristotele (1989, 1993), è articolabile secondo nessi genere-specie che consentono di organizzare gli eventi identificandone gli elementi di identità comune (l'essere riconducibile allo stesso genere, per esempio l'essere tutti animali) che gli elementi differenziali (segnalati dalla diversificazione in specie – "terrestri", "acquatici", "volatili" -, o addirittura dall'attribuzione a genere diversi: "animali" o "piante"). I principi che determinano l'aggregazione e la segregazione delle cose sono, secondo lo Stagirita (Aristotele, 1989, 1990, 1993), l'Identità (A è identico assolutamente identico o per certi versi a B) e l'opponibilità (A è "opposto" in qualche forma a B). Il primo opera sulle diverse forme di identità tra due o più fatti (identità perfetta, somiglianza, uguaglianza) giustificando quindi le aggregazioni e le inclusioni categoriali; mentre il secondo opera rispetto ai diversi modi in cui si rende manifesta un'opponibilità tra fatti (nella forma della diversità, della differenza, della contrarietà o dell'opposizione) stabilendo le esclusioni categoriali e sancendo la non riconducibilità degli eventi confrontati allo stesso raggruppamento. Tali principi, nella concezione di Aristotele (1989, 1990, 1993), emergono dal confronto tra fatti e non esprimono soltanto la relazione che sussiste tra essi contribuendo alla definizione di un evento. Questo processo avviene mediante il riconoscimento del genere e della specie di appartenenza: identificare, cioè, le proprietà che lo presentano identico ad un'altra classe particolare di fatti (elementi d'identità del genere) e quelle che invece lo diversificano, rivelandone la specificità (differenza specifica); pertanto somiglianza e diversità contribuiscono a definire l'identità delle cose (Savardi & Bianchi, 1996, 1997). L'opponibilità invece opera nelle relazioni un processo diairetico, consistente nel movimento di

divisione dall'uno al molteplice che permette la differenziazione delle cose e la segregazione tra classi con la precisazione, fatta dallo stesso Aristotele, che "tutte le divisioni si fanno per opposti" (Metaph. I, 8, 1058a, 10). È bene, però, chiarire che gli opposti che determinano le divisioni non sono dello stesso tipo: la diversità definisce la relazione che si instaura tra le categorie, a livello, quindi, intercategoriale, e la differenza specifica, a livello intracategoriale. In merito alla differenza specifica che si registra sia all'interno di una stessa categoria (intracategoriale) o all'esterno, lo Stagirita (1989, 1990, 1993) precisa che le differenze specifiche intracategoriali o quelle extracategoriali sia fondato su una classe specifica di opponibilità, costituita dalla contrarietà, considerata come negazione degli opposti. Secondo la definizione delle Categorie (1989), essere contrari significa essere massimamente opposti e quest'opposizione massima ha proprio il carattere della negazione, dal momento che il contrario esprime la privazione perfetta, cioè la negazione, dell'altro termine del nesso. I due poli della contrarietà costituiscono l'uno il positivo, nel senso di ciò che possiede la qualità, l'altro il negativo, nel senso di ciò che è privo di essa. I termini intermedi esprimono delle negazioni parziali di entrambe le polarità, come viene enfatizzato dalle parole di Aristotele: l'intermedio "si determina con la negazione di ciascuno degli estremi: ad esempio, ciò che non è né buono né cattivo e né giusto né ingiusto" (Cat. 10, 12a 22-24). Un'altra precisazione fatta dallo stesso Autore riguarda la differenza e la diversità che "non sono la medesima cosa. Infatti ciò che è diverso e ciò da cui esso è diverso non sono necessariamente diversi per qualcosa di determinato (...). Invece ciò che è differente è differente da qualcosa per qualcosa di determinato, di guisa che deve esserci qualcosa di identico per cui differiscono" (Metaf. X (I), 3, 1054b 23-26). Successivamente Aristotele chiarirà che le cose che differiscono solamente per genere sono solo diverse e non differenti in quanto non la loro diversità non viene limitata ad una dimensione determinata e comune; per esempio giallo- ruvido sono diversi e non possiedono una dimensione qualitativa comune e non sono quindi riconducibili ad uno stesso genere. Le diversità invece riportabili entro un genere, che sono differenze specifiche, sono invece relative ad una stessa dimensione qualitativa, rispetto alla quale i due contrari fungono da estremi (Metaf. X (I)

4, 1055a, 8). L'opponibilità quindi è costituita sia dalla diversità aspecifica, quella si riconosce tra eventi anche genericamente non identici, sia dalla differenza specifica, e quindi la contrarietà, definita rispetto ad una precisa dimensione, esprimente sia il carattere di opposizione massima che di variabilità intermedia (Savardi & Bianchi, 1997).

Dopo aver chiarito distinzione tra diversità e contrarietà intesa come differenza specifica, verrà ora presentato come i contrari, intesi in questa accezione, siano alla base dei processi di ragionamento.

### **3.1 I contrari nel ragionamento logico.**

Secondo la teoria argomentativa del ragionamento avanzata da Mercier e Sperber (Mercier & Sperber, 2009, 2011; Mercier, 2009) il ragionamento viene concepito come strumento per produrre e valutare gli argomenti destinati alla persuasione, rendendo, in questo modo, possibile ed efficace la comunicazione umana. Dato il fatto che una specifica abilità possiede una funzione particolare per la quale si è evoluta garantendo l'adattamento dell'organismo all'ambiente e dato il fatto che essa risulta funzionare meglio nell'espletamento di compiti che corrispondono a quella determinata funzione, la funzione evolutiva del ragionamento risulta essere connaturata con la comunicazione umana; pertanto le attività in cui tale processo è coinvolto verranno svolte al meglio nei contesti argomentativi e di gruppo. Alla base del suo funzionamento viene postulata l'esistenza di un meccanismo di vigilanza epistemica, definito come un meccanismo di filtro sull'informazione comunicata (Mercier & Sperber, 2011; Sperber, Clément, Heintz, Mascaro, Mercier, Origgi, & Wilson, 2010). L'azione di tale meccanismo implica la contrarietà in quanto consiste nella valutazione della veridicità o meno dell'informazione ricevuta per evitare che il destinatario della comunicazione rimanga vittima di un'informazione fuorviante. Fondamentale per lo svolgimento di questa funzione di filtro è l'intervento di due meccanismi cognitivi, il cui funzionamento è regolato dalla contrarietà: la calibrazione della fiducia (trust calibration) e la verifica della coerenza (coherence checking). Il primo consiste nel giudicare l'affidabilità/ inaffidabilità della fonte da cui l'informazione è stata ricevuta; si tratta cioè di determinare l'attendibilità o meno



dell'interlocutore, emittente della comunicazione. Il secondo, invece, è indirizzato a valutare il contenuto del messaggio ricevuto, verificandone la coerenza/ incoerenza rispetto al sistema di credenze possedute dal destinatario della comunicazione.

La contrarietà risulta essere fondamentale anche nel processo di soluzione di problemi logici come i sillogismi. Secondo la teoria dei modelli mentali (Evans, Handley, Harper, Johnson-Laird, 1999; Johnson-Laird, 1983; Johnson-Laird & Bara, 1984; Johnson-Laird & Byrne, 1991) si deve verificare l'esistenza o meno di contro- esempi per validare la conclusione tratta dal modello mentale che il solutore si è formato a partire dalle premesse poste dal problema; pertanto la ricerca di contro- esempi risulta essere un passaggio chiave nell'individuazione della risposta corretta. Secondo gli esponenti di tale teoria essi consistono in modelli in cui le premesse sono vere, ma la conclusione è falsa. Di conseguenza perché la conclusione sia valida è necessario verificare se a partire dalle premesse iniziali poste dal problema è possibile derivare una conclusione contraria, quindi falsa, rispetto all'ipotesi precedentemente formulata in cui la conclusione risulta essere vera. Il rapporto che si viene creare tra il modello iniziale derivato dal solutore e quello rappresentato dal contro- esempio consiste in una relazione di contrarietà che si fonda sul valore opposto assunto dalla conclusione: di verità nel primo e di falsità nel secondo.

La contrarietà risulta essere una componente fondamentale nel processo di ragionamento coinvolto nella verifica di ipotesi (hypothesis testing performance), concepito come una costituente centrale del ragionamento umano (Evans, 2007; Poletiek, 2001) in quanto riscontrabile sia nelle situazioni quotidiane in cui gli esseri umani devono far fronte ai problemi che gli si pongono di fronte sia nel ragionamento scientifico. Rilevante per la verifica di un'ipotesi è l'atteggiamento falsificazionista (Popper, 1959), in cui è necessario andare alla ricerca di prove che non confermino l'ipotesi da testare. Al contrario, come è stato messo in luce più volte, questo non avviene e gli esseri umani impegnati nella soluzione di compiti in cui viene indagata tale performance ottengono scarsi risultati (Evans, 1989; Evans et al., 1993; Johnson- Laird & Wason, 1970). Sono stati condotti molti esperimenti caratterizzati dall'enfasi posta sulla falsificazione, ma anche in questi casi i risultati

hanno dimostrato l'insuccesso della manipolazione introdotta al fine di migliorare la performance (Gorman & Gorman, 1984; Gorman, Gorman, Latta & Cunningham, 1984; Gorman, Stafford & Gorman, 1987; Kareev, Halberstadt & Shafir, 1993; Mynatt, Doherty & Tweney, 1977; Mynatt, Doherty & Tweney, 1978; Tweney, Doherty, Worner, Pliske, Mynatt, Gross & Arkkelin, 1980). Una spiegazione plausibile dei risultati ottenuti è quella fornita da Poletiek (1996) secondo cui la falsificazione nella verifica d'ipotesi risulta essere psicologicamente implausibile a causa di una relazione paradossale tra il comportamento di verifica e la correttezza dell'ipotesi corrente posseduta da un individuo. Infatti, nel momento in cui i partecipanti forniscono una tripletta nel compito di scoperta della regola di Wason (1960) al fine di indovinare la regola sottostante, essi considerano la proposta come la loro migliore supposizione rispetto alla regola da scoprire e pertanto vanno alla ricerca di esempi che si adattano alla loro congettura concepita come corretta. Questo, però, non è in linea con quanto richiesto dall'atteggiamento falsificazionista che consiste nel ricercare esempi che confutano la loro ipotesi, che in questo caso dovrebbe essere considerata falsa.

Il miglioramento nella performance di verifica delle ipotesi viene raggiunto introducendo un meccanismo basato sul fornire indizi contrastanti (*"contrast class cues"*) rispetto alla soluzione corretta (Gale & Ball, 2003, 2006, 2009, 2012). La nozione di *"contrast class"* non costituisce un concetto logico, ma psicologico in quanto non si riferisce ad un preciso complemento di un insieme ma essa è prodotta dalle componenti rilevanti o maggiormente rilevanti di quell'insieme (Oaksford, 2002). Adattando la definizione di indizi contrastanti sopra esposta al compito di Wason (1960), si tratta pertanto di fornire indizi contrastanti che si collochino sulla dimensione rilevante implicata nella soluzione del compito, quella, cioè, individuata dalla coppia di aggettivi *"ascendente-discendente"*. Gli studi condotti in questo settore (Gale & Ball, 2003, 2006, 2009, 2012) hanno rivelato che non basta semplicemente fornire una tripletta in cui i numeri non siano disposti in ordine crescente affinché venga registrato un miglioramento nel punteggio dei partecipanti al compito, ma l'indizio fornito deve possedere alcune peculiarità per essere utile (Gale & Ball 2012):

- 1) deve collocarsi all'interno della dimensione rilevante e non saliente, deve cioè richiamare la stessa dimensione sottostante all'esempio presentato dal problema; pertanto il suggerimento consistente nella tripletta di numeri "4-4-4" non è adeguato perché è contrastante con la tripletta di numeri "2-4-6" rispetto alla dimensione saliente *"tre numeri identici versus tre numeri differenti"* e non suggerisce l'importanza della dimensione *"ascendente versus discendente"*;
- 2) deve inoltre contenere un'informazione relazionale massimamente funzionale, cioè, in linea con quanto proposto da Cherubini et al. (2005), secondo cui gli esseri umani impegnati nell'attività di verifica delle ipotesi devono possedere capacità che permettano loro sia di identificare le relazioni percepibili tra i numeri costituenti la tripletta fornita sia di utilizzare l'informazione relazionale per formulare ipotesi, la tripletta di numeri "9-8-1" pur richiamando la dimensione rilevante, non contiene l'informazione relazionale massimamente utile, in quanto risulta contrastare l'esempio fornito dal problema rispetto ad una varietà di dimensioni salienti ma non rilevanti, quali *"il mescolare numeri pari e dispari versus il possedere solamente numeri pari"*, *"intervalli diversi versus intervalli uguali"*, *"il numero centrale non rappresenta la media aritmetica dei numeri esterni versus il numero centrale corrisponde alla media aritmetica dei due numeri esterni"*.

In linea, quindi, con le caratteristiche esposte sopra è solamente l'indizio contrastante formato dai numeri "6-4-2" che facilita la scoperta della regola nel compito di Wason (1960).

Il ragionare ipotizzando situazioni contrarie rispetto a quelle che si presentano può essere utile nel momento in cui ci si trova ad affrontare situazioni problematiche (De Bono, 1967, 1970; Kogan, 1971; Zingales, 1974). De Bono (1967, 1970) nella sua trattazione del pensiero laterale che, contrariamente al pensiero verticale che caratterizza il pensiero logico, non procede in modo sequenziale e permette una rielaborazione feconda ed intuitiva delle idee, necessaria per lo sviluppo della creatività, propone che uno dei modi affinché ciò avvenga è costituito dal metodo dell'inversione. Nel momento in cui le persone si trovano a dover risolvere un problema creativo

indeterminato, è difficile sapere da quale punto partire; un metodo proficuo al fine di rielaborare l'informazione contenuta nel problema consiste nell'identificare le relazioni tra la varie parti del problema e rovesciarle invertendone la direzione. Non ci sono inversioni corrette o sbagliate, ma ciò che utile, nel pensiero laterale, è una differente elaborazione dell'informazione in modo da provocare un diverso modo di considerare la situazione. Kogan (1971) suggerisce di provare ad utilizzare opposte metodologie di soluzione nel momento in cui i tentativi di soluzione basati sull'uso di metodi diretti falliscono. Zingales (1974), infine, suggerisce che una possibile modalità di pensare creativamente in un processo di problem solving consiste nel portare, ipoteticamente, la situazione o alcuni suoi aspetti al raggiungimento dei valori estremi utilizzando strategie basate su operazioni opposte: esagerazioni, ingrandimenti, o aggiunte di aspetti originale da una parte; diminuzioni, dissezioni, e sottrazioni dall'altra. Un'altra metodologia suggerita (Zingales, 1974) è data dallo scegliere una delle strategie presentate sopra e poi invertire i risultati ottenuti.

Data l'importanza, fin qui delineata, rivestita dal meccanismo fondato sui contrari per il corretto funzionamento del ragionamento si suppone che l'elaborazione di aspetti percettivo – figurali, alla base del pensiero visivo, possa implicare la manipolazione di proprietà percettive legate da una relazione di contrarietà percettivamente fondata. Successivamente, quindi, verranno presentate le caratteristiche che definiscono la contrarietà in quanto relazione percettiva e come quest'ultima possa essere coinvolta nei cambiamenti implicati nel processo di soluzione di problemi spazio-geometrici.

### **3.2 La contrarietà come relazione percettiva.**

La realtà fenomenica, ossia il mondo così come viene percepito attraverso la dotazione sensoriale ordinaria (cioè i sensi) di qualsiasi essere umano (Koffka, 1935; Köhler, 1929; Metzger, 1941), risulta essere caratterizzata da proprietà organizzate da una relazione di contrarietà (Bianchi & Savadi, 2008; Savardi & Bianchi, 1997, 2000). Tale relazione non è a fondamento solamente della struttura linguistica di qualsiasi linguaggio (Croft & Cruse, 2004; Jones, 2002; Paradis & Willners, 2011) ma risulta essere un fattore organizzante dell'esperienza percettiva legata alle dimensioni

spaziali (Bianchi & Savardi, 2008; Bianchi, Savardi & Kubovy, 2011; Bianchi, Savardi & Burro, 2011; Savardi & Bianchi, 1997, 2005, 2009). Essa inoltre possiede determinate specificità che permettono di renderla differente e facilmente distinguibile dalle altre relazioni percettive, come quelle di somiglianza e di diversità ed è governata da determinati principi (Bianchi & Savardi, 2008; Savardi & Bianchi, 1997, 2000). Trattandosi di una relazione fenomenica, la contrarietà è esperibile dal punto di vista percettivo nel momento in cui esistano due eventi, proprietà o parti di uno stesso oggetto presenti nel campo percettivo sotto osservazione oppure quando uno dei due poli contrari non è propriamente sotto osservazione ma risulta essere fenomenicamente presente nell'esperienza della dimensione entro cui l'evento si colloca (Savardi & Bianchi, 2000). È inoltre sempre possibile dato un qualsiasi evento sotto osservazione trovare un suo contrario (Savardi & Bianchi 2005). Questo risulta essere vero sia rispetto al fatto che di un evento può essere esperito l'evento contrario (principio di contrarietà generale tra), sia rispetto al fatto che all'interno di uno stesso evento è possibile trovare proprietà contrarie (principio di contrarietà generale tra), per esempio in una stanza è possibile identificare un alto, dato dal soffitto, un basso, rappresentato dal pavimento, una parete a destra ed una sinistra, ecc. (Savardi & Bianchi, 2005). I contrari, inoltre risultano essere mutualmente esclusivi, cioè è possibile esperire contemporaneamente due proprietà contrarie, ma non è possibile che una qualità venga percepita contemporaneamente in un modo e nel suo contrario (Bianchi, & Savardi, 2008); ad esempio in una stanza è possibile distinguere un alto e un basso ma non è possibile che l'alto venga percepito anche come basso. All'interno di un evento sotto osservazione è inoltre possibile che esso venga identificato da determinate proprietà, ciascuna delle quali possiede il proprio contrario (principio di operazionalizzabilità; Savardi & Bianchi, 2000). Prendendo per esempio in considerazione un libro esso si qualifica come solido, rettangolare, rigido, con la superficie liscia, ecc. Per ognuna di queste proprietà può essere rintracciato il suo contrario: in ordine troviamo liquido, rotondo, molle, superficie ruvida. Questo principio applicato invece alle proprietà implica il riconoscimento della non esistenza di proprietà percettive "pure" e la constatazione che l'identità di ciascuna di esse è definita multidimensionalmente, anche sul piano

dell'intermodalità sensoriale (Savardi, Bianchi, 2000). Ad esempio l'identità di morbido può esser scomposta in una serie di proprietà che insieme contribuiscono a specificare l'esperienza di "morbidezza": la rotondità (visiva), la lentezza (cinestesica), la dolcezza (gustativa), la piacevolezza (espressiva). Ad ognuna di queste componenti corrisponde una qualità contraria: la spigolosità (visiva), la rapidità (cinestesica), l'asprezza (gustativa), la spiacevolezza (espressiva). I contrari nella tradizione psicologica che utilizza metodologie basate sull'uso di scale bipolari, quali il differenziale semantico, la scala Likert, ecc., vengono considerati come due punti finali giacenti su un unico continuum (Conrad et al., 2004; Idaszak & Drasgow, 1987; Millis & Neimeyer, 1990; Podsakoff, MacKenzie, Lee, & Podsakoff, 2003; Yorke, 2001). L'esperienza percettiva dei contrari risulta invece andare nella direzione opposta rispetto a questa assunzione: le proprietà contrarie non rappresentano gli estremi di un unico continuum, di un'unica dimensione, in quanto il comportamento di un polo non rispecchia in maniera speculare il comportamento del polo contrario (Bianchi, Savardi, & Burro, 2011). Questo risultato potrebbe essere determinato dal fatto che ciascuna proprietà è influenzata dalle interazioni con altre proprietà che non agiscono necessariamente in maniera simmetrica sui due poli (Bianchi, Savardi, & Burro, 2011). I contrari, risultano, inoltre, possedere un comportamento anisotropo, cioè non simmetrico, nel senso che ogni proprietà copre una gamma di esperienze che non necessariamente si uguaglia alla quantità di esperienze comprese dal polo contrario (Bianchi & Savardi, 2008). Nonostante l'asimmetria riscontrata nel comportamento dei contrari è comunque sempre possibile individuare una proprietà intermedia, che si collochi cioè tra i due poli (Bianchi & Savardi, 2008). Questo risulta essere maggiormente evidente per i contrari come piccolo- grande, in cui il passaggio da una proprietà alla sua contraria sembra essere continuo. Per le altre dimensioni in cui ciò non avviene e un polo sembra trasformarsi automaticamente nell'altro, come ad esempio aperto- chiuso, tale principio prevede che con questo carattere dicotomico conviva allo stesso tempo un modo di essere continuo dell'esperienza delle due polarità (Savardi & Bianchi, I., 2000). C'è cioè comunque una qualche proprietà di uno dei due poli che assume fenomenicamente il carattere dell'esperienza

intermedia. Facendo riferimento ad aperto- chiuso, si può constatare che tutto ciò che non è chiuso fa parte dell'aperto, ma ci sono diversi modi di essere aperto ed alcuni di questi saturano l'esperienza di questa proprietà come una finestra spalancata, gli occhi ben aperti; altri invece sono vicini al chiuso, come una finestra con uno spiraglio aperto, la porta accostata, le palpebre socchiuse. L'identificazione di una proprietà contraria è inoltre subordinata all'identità dell'evento e ai gradi di libertà della richiesta o compito che ne media l'identificazione (Savardi & Bianchi, 2000). Con questo si intende che il riconoscimento dei contrari dipende sia dalla struttura percettiva che definisce l'identità dell'oggetto sia dalla natura del compito in cui l'identificazione dei poli contrari è inserita. Collegato a questo vi sono due caratteristiche, il principio del grado di adeguatezza e il principio di richiedibilità. Con il primo si intende che le proprietà componenti l'identità di un evento si differenziano in funzione della loro capacità di generare, se contrarizzate, un alto o basso grado di contrarietà nel nuovo evento, a parità di numero di trasformazioni introdotte (Savardi & Bianchi, 2000). Viene pertanto riconosciuto che dato un evento iniziale gli eventi contrari ottenibili ciascuno dalla contrarizzazione di una delle sue proprietà componenti, possono risultare percettivamente più o meno contrari in funzione del tipo di proprietà contrarizzata. Si possono quindi ottenere contrari evidenti o non evidenti. Il principio di richiedibilità afferma che in un compito di contrarizzazione, le proprietà componenti l'identità di un evento si differenziano in funzione della capacità di richiedere la propria trasformazione (Savardi, & Bianchi, 2000). La contrarietà risulta essere inoltre governata da altri due principi, tra loro collegati: il principio di invarianza e quello di non sommatività. Il primo afferma che la condizione necessaria perché due eventi vengano esperiti come contrari è che sia garantita tra le loro identità un'evidente grado di identità reciproca (Savardi, & Bianchi, 2000). L'invarianza può essere data a due livelli:

- 1) nel caso di due eventi, oggetti o predicati, questa è garantita dall'identità osservabile dei due eventi;
- 2) nel caso di due proprietà, è data dall'appartenenza alla stessa dimensione.

Il principio di non sommatività dei contrari prevede che dato un evento il suo contrario non può essere ottenuto contrarizzando una ad una tutte le sue proprietà (Bianchi & Savardi, 2008), perché così facendo viene meno, come abbiamo visto, il principio di invarianza e i due eventi anziché contrari risultano essere diversi. Il carattere di anisotropia, precedentemente sottolineato, contraddistingue, infine, le trasformazioni che avvengono entro i poli: la trasformazione di una proprietà non necessariamente produce lo stesso grado di contrarietà nelle due direzioni ammesse (Bianchi & Savardi, 2008), cioè può succedere che una trasformazione venga percepita maggiormente contraria passando da un polo all'altro rispetto al cambiamento inverso. Questo a sua volta può essere suddiviso in due sottoprincipi: il principio di anisotropia della richiedibilità della trasformazione verso l'uno o l'altro polo e il principio di anisotropia del grado di adeguatezza della trasformazione verso l'uno o l'altro polo. Con il primo si intende che la richiedibilità delle due polarità della dimensione ad essere trasformate in un compito di contrarizzazione non è necessariamente identica; mentre il secondo afferma che l'esito della trasformazione di una stessa proprietà nella direzione dell'uno o dell'altro polo non produce lo stesso grado di contrarietà (Savardi & Bianchi, 2008).

Data la pervasività della relazione di contrarietà avente la struttura sopra delineata nei processi percettivi e cognitivi (Savardi, 2009), si suppone che una simile relazione sia coinvolta anche nel processo di riorganizzazione implicato nella soluzione di problemi spazio-geometrici. La fondatezza di un'ipotesi di questo tipo è data dalla proposta di Duncker (1969) che, argomentando intorno alle due tipologie di fissità, ha specificato che le alterazioni che una situazione deve subire in un processo di pensiero produttivo consistono, in alcuni casi, in una trasposizione di funzioni dato dal passaggio dalla funzione originale alla sua contraria. La definizione data da Duncker al termine contrarietà è in linea con quanto proposto finora; si tratta cioè di una relazione percettiva: *“Chiamo «contrarie» due funzioni diverse dello stesso tutto – il che è una generalizzazione del concetto logico «termini contrari». Si dice, ad es., che «lungo» e «corto» (o rosso e blu) sono contrari, perché si escludono reciprocamente. Essi appartengono alla stessa «dimensione», si*



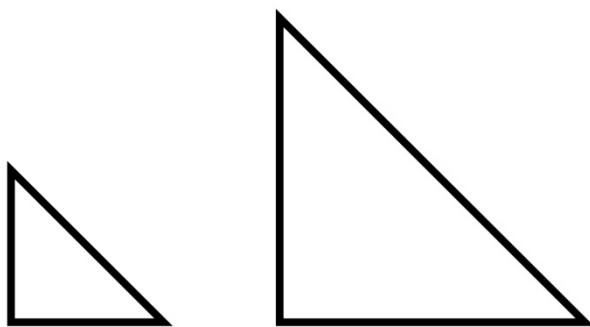
*riferiscono ad un medesimo aspetto dell'oggetto, hanno la stessa posizione strutturale e, di conseguenza, si trovano in una specifica e vitale tensione l'uno nei confronti dell'altro. Lungo e rosso, d'altro lato, non sono contrari: tra di loro viene a trovarsi, per così dire, un intervallo morto. Il concetto di «contrario» è stato finora definito dalla logica solo in riferimento a totalità astratte e ideali (cioè a dimensioni qualitative). Io lo adopero in modo analogo in riferimento a «totalità reali», cioè a strutture reali definite e, talvolta, uniche. All'interno di queste totalità, funzioni diverse si richiamano reciprocamente (in posizioni diverse): per es., martello e incudine, padre e figlio, raggio e tangente. Tali funzioni possono venir chiamate «realmente contrarie». Ora, se uno stesso e medesimo oggetto deve assumere funzioni realmente contrarie l'una all'altra, questo fatto sarà chiamato «trasposizione di funzioni all'interno del sistema» (Duncker, 1969, pp. 183-184).*

### **3.3 La contrarietà in geometria.**

La contrarietà, intesa come relazione percettiva, è quindi implicata, come sottolineato da Duncker (1969), nella soluzione di problemi in cui centrale risulta essere la manipolazione di aspetti visivo-figurali. Dato il forte legame della contrarietà con l'esperienza percettiva di spazio (Bianchi, Savardi 2008; Bianchi, Savardi & Kubovy, 2011; Savardi & Bianchi, 2009) e dato il fatto che il legame tra la struttura fenomenica del problema e la sua soluzione consiste in una relazione di contrarietà (Branchini, Burro & Savardi, 2009) si ipotizza che i cambiamenti richiesti per risolvere problemi spazio-geometrici avvengano entro proprietà contrarie. Questo paragrafo si concentrerà sull'analisi delle trasformazioni geometriche (Ministero della Pubblica Istruzione, 1995-1996) subite dalle proprietà fenomenico-percettive, che connotano un problema geometrico, durante il processo di soluzione mettendo in evidenza la relazione di contrarietà che lega la situazione iniziale e quella finale.

Prima di iniziare ad esaminare i cambiamenti connessi alle diverse trasformazioni geometriche, è necessario chiarire che cosa intende geometricamente quando si parla di trasformazione.

Una trasformazione geometrica viene definita come *“una corrispondenza dei punti del piano in sé: ad ogni punto del piano la trasformazione fa corrispondere un punto del piano stesso”* (Ministero della Pubblica Istruzione, 1995-1996, p.79). Le trasformazioni geometriche più semplici e che si collocano da un livello generale sono quelle topologiche consistenti in trasformazioni che soddisfano alla sola condizione della continuità. Rientrano in questa tipologia le possibili deformazioni che può subire una determinata forma geometrica; ne sono un esempio gli “stiramenti” delle figure. Supponiamo per esempio di disegnare su una superficie elastica, che si può stirare, la figura di un triangolo (cfr. figura 6); quest’ultima, dopo il processo di deformazione, mantiene una certa identità con la figura d’origine: l’essere costituita da tre lati, l’avere contorno che delimita lo spazio interno da quello esterno e il possedere una linea chiusa. Ci sono tuttavia alcuni elementi di variazione che riconducono a differenze specifiche di alcune proprietà della figura: i lati subiscono un processo di allungamento diventando più lunghi rispetto alla situazione iniziale, dove invece erano più corti e la figura viene ingrandita, cioè risulta essere più grande rispetto all’originale.

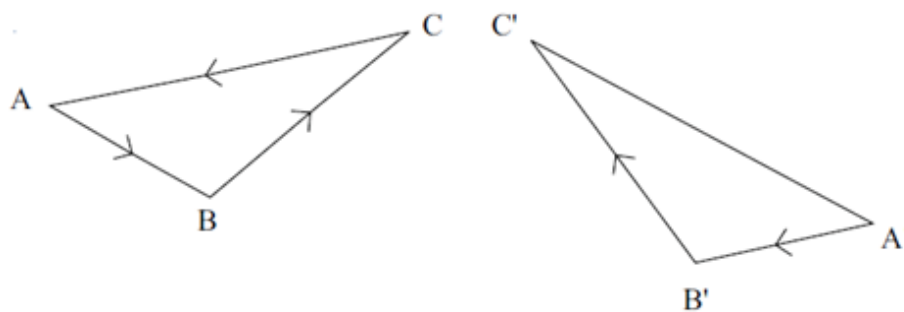


**Figura 6-** La figura mostra a sinistra un triangolo, mentre a destra lo stesso triangolo dopo aver subito un processo di stiramento.

In questo caso i cambiamenti intervenuti sulla figura originale del triangolo implicano la contrarietà in quanto si riferiscono ad una determinata qualità: la lunghezza, rappresentata dai poli lungo- corto, e l’estensione della figura, identificata dalla coppia di aggettivi grande- piccolo.

In questo caso la deformazione subita dal triangolo di partenza non ha comportato alcuna modifica rispetto al rapporto esistente tra i lati, cioè il fatto che vi siano due lati retti perpendicolari tra loro e un lato obliquo. Tale invarianza risulta essere una caratteristica di un tipo particolare di trasformazione topologica, le similitudini, in cui le distanze vengono tutte moltiplicate per una costante positiva  $k$ . Le deformazioni, tuttavia, ammettono la possibilità che si modifichino le distanze tra i lati ed altre proprietà riguardanti l'orientamento dei lati stessi, come il parallelismo o la perpendicolarità. Per esempio il triangolo poteva essere deformato in una figura arrotondata che in questo caso risultava essere diversa dalla figura originale, ma costituita da proprietà fenomenico-percettive contrarie rispetto alle qualità del triangolo; una di queste è rappresentata dalla spigolosità, propria del triangolo, e dalla rotondità, caratteristica della figura finale.

La trasformazione geometrica in cui vengono mantenute le distanze tra i lati è data dalle isometrie.

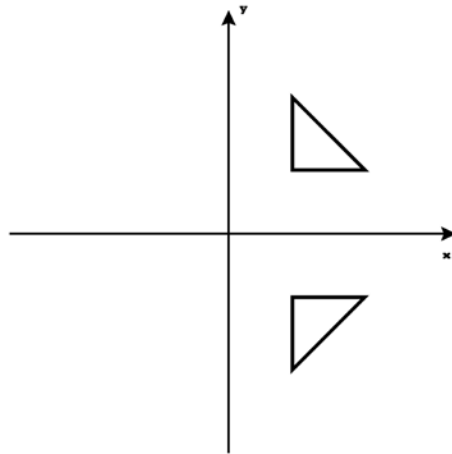


**Figura 7- La figura rappresenta un esempio di isometria**

Per spiegare i cambiamenti sottostanti nelle isometrie, prendiamo come punto di riferimento la figura 7 in cui mediante un'isometria il triangolo ABC è stato trasformato nel triangolo A'B'C'. In primo luogo è avvenuta una traslazione dei vertici A in A', B in B' e C in C'; i vertici sono stati spostati da sinistra a destra: A che prima rappresentava il punto più a sinistra nel triangolo originale, ora rappresenta il punto più a destra (A') del triangolo A'B'C'; B viene spostato da sinistra a destra (B'); C che era il punto più a destra del triangolo ABC viene traslato da sinistra a destra (C') e risulta essere il punto più a sinistra del triangolo A'B'C'. Il triangolo ABC, mediante una simmetria assiale

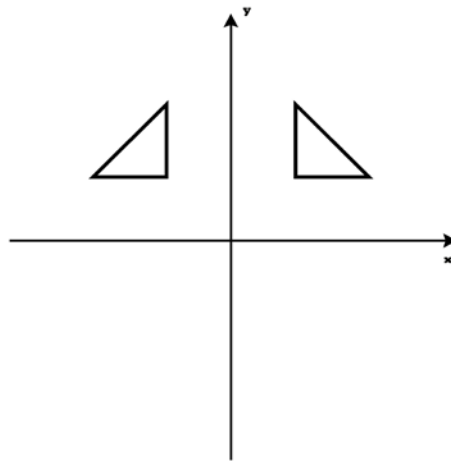
rispetto all'asse y, viene capovolto: l'estensione figurale da sinistra viene spostata a destra; il lato A'C' delimita la parte destra della nuova figura, contrariamente al lato AC che formava il contorno sinistro del triangolo e B'C' che costituisce il contorno sinistro della figura ottenuta, mentre il lato BC delimitava la parte destra del triangolo ABC. Il triangolo A'B'C' ha subito una rotazione di  $45^\circ$  in senso orario, quindi dall'alto è stato spostato verso il basso. Le frecce che percorrono il contorno delle due figure indicano il senso di percorrenza del contorno figurale che risultano essere contrari nelle due figure: antiorario nel triangolo ABC e orario nel triangolo A'B'C'. La contrarietà della direzione dei sensi di percorrenza del contorno della figura caratterizza l'isometria inversa; mentre il mantenimento della direzione dei sensi di percorrenza identifica i casi di isometria diretta.

Analizzando i cambiamenti insiti nell'isometria che ha portato la trasformazione del triangolo ABC nel triangolo A'B'C', ci si è imbattuti in altre tipologie di trasformazioni geometriche, implicanti variazioni entro contrari; tra cui la traslazione, che consiste nello spostamento di un elemento da sinistra a destra e viceversa, oppure dall'alto verso il basso e viceversa. Un'altra trasformazione geometrica è rappresentata dalla simmetria che comprende al suo interno diverse tipologie. Prendendo come punto di riferimento uno spazio definito dagli assi cartesiani, x e y, si distingue la simmetria assiale rispetto all'asse x, la cui equazione è  $x' = x$  e  $y' = -y$ , che consiste nel rovesciare la figura, rivolta verso l'alto, verso il basso o viceversa (dal basso verso l'alto) mantenendo la stessa forma, le stesse dimensioni e gli stessi rapporti esistenti tra gli elementi della figura (perpendicolarità dei lati, ampiezza degli angoli). Il capovolgimento ha comportato le seguenti contrarizzazioni: il lato orizzontale, che rappresenta la base del triangolo in alto, viene posizionato verticalmente e forma l'altezza del triangolo in basso; viceversa, il lato verticale del triangolo in alto viene disposto orizzontalmente nel triangolo in basso; il vertice in alto del triangolo in alto si trova a formare il vertice in basso della nuova figura; l'angolo di  $90^\circ$ , che si trova in basso nel triangolo in alto, è in alto nel triangolo in basso; l'altro angolo alla base (in basso) della figura in alto viene a costituire il vertice in alto della figura in basso.



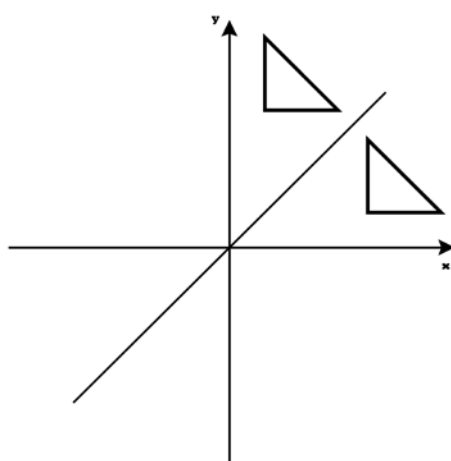
**Figura 8-** La figura rappresenta un esempio di simmetria assiale in cui la figura originale che si trova in lato è stata capovolta verso il basso.

La simmetria assiale rispetto all'asse  $y$ , la cui equazione è  $x' = -x$  e  $y' = y$ , è data da un capovolgimento della figura da destra a sinistra e viceversa. Prendendo come esempio di questo tipo di simmetria la figura 9, il triangolo a destra, mediante una simmetria assiale rispetto all'asse  $y$ , è stato capovolto a sinistra. Il rovesciamento ha comportato le seguenti trasformazioni contrarie: il lato obliquo, rappresentante il margine destro della figura originale, viene spostato a sinistra, così come l'angolo alla base formato dall'intersezione della base e del lato obliquo; l'altezza, che rappresentava il confine sinistro del triangolo a destra, risulta essere delimitare la parte destra del triangolo a sinistra.



**Figura 9-** La figura mostra un esempio di simmetria assiale rispetto all'asse y.

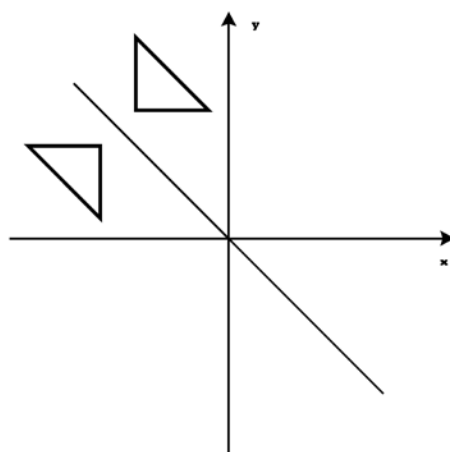
Vi sono inoltre le simmetrie rispetto alle bisettrici dei vari quadranti che compongono il piano cartesiano: la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, la cui equazione è  $x'=y$  e  $y'=x$ , in cui la figura, se a sinistra e in alto rispetto alla linea in diagonale coincidente con la bisettrice del primo e del terzo quadrante (quelli in cui sia le ascisse e le ordinate hanno lo stesso segno, o positivo o negativo), viene rovesciata verso il basso rispetto alla linea di riferimento (cfr. figura 10). Il capovolgimento ha provocato le seguenti variazioni entro contrari: il lato verticale della figura in alto rispetto alla bisettrice diventa il lato orizzontale del triangolo in basso rispetto alla bisettrice; viceversa il lato orizzontale del triangolo in alto forma l'altezza del triangolo in basso; il vertice in alto della figura originale va a formare l'angolo alla base (in basso) della nuova figura ottenuta; al contrario l'angolo alla base del triangolo iniziale rappresenta il vertice in alto del triangolo finale.



**Figura 10-** La figura mostra un esempio di simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante

Gli spostamenti, costituenti questo tipo di simmetria, non comportano il cambiamento del quadrante della figura iniziale; pertanto se la forma geometrica si colloca nel primo quadrante, la figura finale, ottenuta mediante simmetria, rimane nel medesimo quadrante.

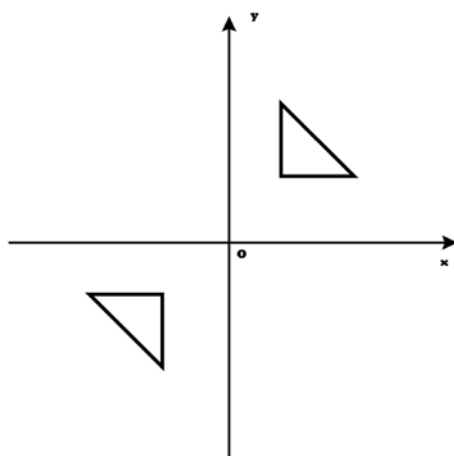
La simmetria rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, la cui equazione è  $x' = -y$  e  $y' = -x$ , consiste nel rovesciare la figura geometrica iniziale, se in alto, in basso rispetto alla linea diagonale corrispondente alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante (quelli in cui l'asse delle ascisse e delle ordinate hanno segni contrari l'uno rispetto all'altro; cfr. figura 11). Il capovolgimento comprende le seguenti contrarizzazioni: il lato orizzontale della figura in alto viene a formare l'altezza (in verticale) del triangolo in basso rispetto alla linea; al contrario, l'altezza, in verticale, del triangolo iniziale costituisce la base del triangolo finale; l'angolo in alto del triangolo originale forma l'angolo in basso della figura ottenuta; viceversa l'angolo alla base e l'angolo di  $90^\circ$  che si trovano in basso nel triangolo in alto, vengono posizionati in alto nel triangolo in basso.



**Figura 11-** La figura mostra un esempio di simmetria rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante.

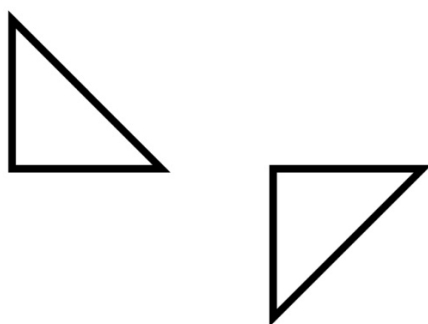
Infine, l'ultima tipologia di simmetria è data dalla simmetria centrale di centro O, la cui equazione è  $x' = -x$  e  $y' = -y$ , in cui la figura, se in alto a destra, viene capovolta verso il basso e verso sinistra (cfr. figura 12). Tale trasformazione implica le seguenti variazioni contrarie: il lato verticale della figura in alto forma la base orizzontale del triangolo in basso; la base orizzontale della figura in alto costituisce il lato verticale della figura in basso; il vertice in alto del triangolo in alto viene a formare l'angolo in basso, mentre l'angolo alla base in basso coincide con l'angolo in alto; il lato obliquo, delimitante la parte destra della figura iniziale, rappresenta il contorno sinistro del triangolo in basso; l'angolo di  $90^\circ$  e l'angolo al vertice in alto, dalla posizione sinistra nella figura iniziale, ricoprono la posizione destra della nuova figura; mentre l'angolo a destra del triangolo in alto diventa l'angolo a sinistra del triangolo in basso.





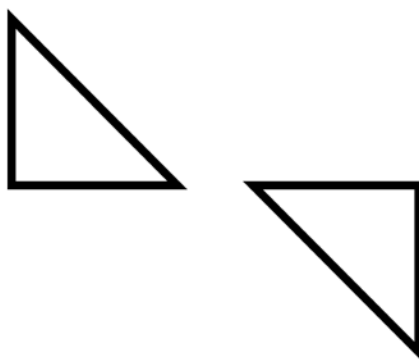
**Figura 12-** La figura mostra un esempio di simmetria centrale di centro O.

Rientrano, infine, nelle trasformazioni geometriche le rotazioni, tra le quali risultano essere centrali le rotazioni di un quarto di giro in senso orario ed antiorario e le rotazioni di mezzo giro. Le prime consistono in una rotazione della figura da sinistra a destra o da destra a sinistra. Osservando la figura 13, il triangolo posizionato a sinistra viene ruotato verso destra; questo comporta le seguenti modifiche: l'altezza verticale viene a formare la base orizzontale nella figura ottenuta; la base orizzontale viene a costituire l'altezza verticale del triangolo ruotato; il vertice in alto viene a formare l'angolo alla base della figura iniziale; mentre l'angolo alla base forma il vertice in basso del triangolo ruotato.



**Figura 13-** La figura rappresenta un esempio di una rotazione di un quarto di giro, in senso orario, del triangolo iniziale, posizionato a sinistra

Le rotazioni di mezzo giro consistono in una rotazione della forma geometrica inizialmente presentata di  $180^\circ$  gradi (cfr. figura 14); questa, se posizionata verticalmente, rivolta verso l'alto e a sinistra, viene ruotata verso il basso e verso destra. Questa trasformazione comprende diversi cambiamenti entro contrari: il lato verticale, rivolto verso l'alto e a sinistra della figura iniziale, viene rivolto verso il basso e si trova ad essere a destra del triangolo ottenuto; il vertice in alto viene ruotato verso il basso e, insieme all'angolo di  $90^\circ$ , da destra, viene posizionato a sinistra nella nuova figura; il lato obliquo da margine destro diventa margine sinistro nel triangolo ottenuto; l'angolo alla base da destra viene posizionato a sinistra del triangolo rivolto verso il basso.



**Figura 14-** La figura rappresenta un esempio di rotazione di mezzo giro, in senso orario, del triangolo iniziale a sinistra.

Dall'analisi delle trasformazioni geometriche coinvolte nella soluzione di problemi geometrici emerge che i cambiamenti di cui esse si compongono comportano specifiche modificazioni delle proprietà fenomeniche che identificano la situazione iniziale: si tratta, cioè, di trasformare gli elementi, legati alla dimensione spaziale, che definiscono la figura geometrica inizialmente presentata nei loro contrari. È possibile pertanto ipotizzare che il processo di soluzione di problemi spazio-geometrici consistente in un processo di riorganizzazione implichi la manipolazione di variabili spaziali contrarie.

## **CAPITOLO QUARTO**

### **LA PARTE SPERIMENTALE**

L'analisi sopra presentata ha evidenziato la forte implicazione della contrarietà nelle trasformazioni geometriche coinvolte nella soluzione di problemi geometrici. In particolare dato che in una trasformazione risultano essenziali il punto di partenza e il punto di arrivo (Ministero della Pubblica Istruzione, 1995-1996), è stato messo in evidenza che il legame esistente tra queste due situazioni è costituito da una relazione di contrarietà: gli elementi problemici, legati allo spazio, che ricoprivano un determinato ruolo nella situazione originale, vengono a svolgere una funzione contraria nella situazione finale. Da questa constatazione nasce l'impianto sperimentale dello studio condotto. Questo capitolo sarà, quindi, dedicato: alla presentazione delle varie componenti del disegno sperimentale, alla spiegazione delle variabili prese in considerazione per l'analisi dei dati e al commento dei risultati ottenuti.

Verranno infine fatte alcune considerazioni finali in merito a quanto è emerso dall'indagine condotte evidenziando i limiti e le possibili implicazioni legati alla ricerca condotta.

#### **4.1 Il disegno sperimentale e le sue componenti.**

La presente ricerca mira ad indagare il ruolo degli aspetti percettivi in un compito di problem solving geometrico, in quanto si ritiene, in linea con quanto enfatizzato in primo luogo dalla psicologia della Gestalt e successivamente dagli studi contemporanei riguardanti i processi di apprendimento in geometria (cfr. *paragrafo 1.4*) e l'insight nel problem solving (cfr. *paragrafo 1.5*), che i processi percettivo-figurali siano fondamentali nella soluzione di problemi spazio-geometrici che implicano cambiamenti fenomenico-percettivi. Data l'influenza dei contrari nei processi di ragionamento (cfr. *paragrafo 3.1*) e dato il fatto che il processo di soluzione dei problemi geometrici consiste in trasformazioni geometriche spaziali che avvengono entro contrari,

come evidenziato dall'analisi teorica condotta, si ipotizza che l'attenzione e la manipolazione di variabili spaziali contrarie modifichino il processo di problem solving geometrico.

Di seguito verrà dettagliato il metodo, suddiviso in partecipanti, procedura e materiali, utilizzato per la conduzione dello studio.

### Metodo

*Partecipanti:* 96 studenti universitari appartenenti all'area umanistica dell'Università degli studi di Verona e 144 studenti frequentanti l'ultimo anno dell'Istituto d'Istruzione Secondaria Superiore "A. Manzoni" di Suzzara che comprende vari indirizzi di studio (liceo scientifico, tecnologico, delle scienze umane, linguistico e ragioneria), per un totale di 240 partecipanti (72 maschi e 168 femmine) suddivisi in 80 gruppi di interosservazione di tre componenti ciascuno.

*Procedura:* l'esperimento è rappresentato da un compito di problem solving geometrico, la cui richiesta consisteva nel risolvere i problemi geometrici presentati. I partecipanti, divisi in gruppi di interosservazione di tre componenti ciascuno (Bozzi 1978, 1989, 2002; Bozzi, Martinuzzi, 1989, Kubovy, 2002), sono stati a risolvere sei problemi spazio geometrici appartenenti alla tradizione gestaltista. Il disegno sperimentale comprende quattro condizioni sperimentali, diverse rispetto a due fattori: "Ricerca contrari", ai partecipanti, in due condizioni, è stato chiesto di cercare i contrari spaziali presenti nella situazione problemica, prima di impegnarsi nella ricerca della soluzione ai problemi presentati (condizione dei contrari impliciti, "B", e condizione dei contrari espliciti, "D"), mentre nelle altre due condizioni (condizione di baseline, "A", e condizione nozionistica, "C") i partecipanti, dopo aver letto il testo del problema, potevano iniziare a risolverlo; "Suggerimento", in due condizioni ai partecipanti è stato suggerito di prestare attenzione ai contrari trovati, in quanto potevano costituire un aiuto per la ricerca della soluzione (condizione dei contrari espliciti, "D") in un caso e di utilizzare tutte le nozioni, le regole e le conoscenze apprese in passato per la soluzione del problema nell'altro (condizione nozionistica "C"), nelle due condizioni rimanenti (condizione di baseline "A" e condizione dei contrari impliciti "B") i partecipanti erano liberi di utilizzare le

conoscenze che ritenevano maggiormente adeguate per risolvere i problemi presentati (cfr. *figura 15*).

|              |          | RICERCA CONTRARI |              |
|--------------|----------|------------------|--------------|
|              |          | Ricerca          | Non ricerca  |
| SUGGERIMENTO | Dato     | Condizione D     | Condizione C |
|              | Non dato | Condizione B     | Condizione A |

**Figura 15-** La tabella rappresenta in forma schematica le quattro condizioni, diverse per i due fattori (“Ricerca contrari” e “Suggerimento”), che costituiscono il disegno sperimentale: la condizione di baseline (A) in cui ai partecipanti è stato chiesto di leggere e risolvere il problema; la condizione dei contrari impliciti (B), in cui ai partecipanti è stato chiesto di trovare i contrari prima di risolvere il problema; la condizione nozionistica (C), in cui i partecipanti sono invitati ad utilizzare le nozioni acquisite in passato per risolvere il problema; la condizione dei contrari espliciti (D), in cui ai partecipanti è stato chiesto di cercare i contrari prima di risolvere il problema ed è stato suggerito che i contrari avrebbero potuto essere d’aiuto per la fase di ricerca della soluzione.

Ai partecipanti era fornito materiale di cancelleria per prendere annotazioni e per elaborazioni grafiche ritenute necessarie ai fini della soluzione.

L’esperimento non prevedeva limiti temporali, per cui partecipanti potevano utilizzare il tempo ritenuto necessario per risolvere il problema presentato. Ogni seduta sperimentale era videoregistrata e si svolgeva alla presenza della sperimentatrice.

*Materiali/Problemi:* sono stati presentati in ordine randomizzato per gli 80 gruppi di interosservazione sei problemi spazio-geometrici: il problema del parallelogramma (Wertheimer, 1965), dei nove punti (Maier, 1930), delle anatre (Harrower, 1932), della finestra dell’altare (Wertheimer, 1965), del quadrato (Kanizsa, 1973), della circonferenza (Köhler, 1971).

#### **4.1.1 La metodologia interosservativa.**

Prima di presentare le variabili prese in esame per l’analisi dei risultati ottenuti, è doveroso fare alcune considerazioni riguardanti la scelta metodologica compiuta.

L’interosservazione rappresenta il metodo della fenomenologia sperimentale (Bozzi 1978, 1989, 2002; Bozzi, Martinuzzi, 1989), considerata come una disciplina avente l’obiettivo di indagare il

mondo fenomenico, ossia la realtà che viene testimoniata dai sensi (Koffka, 1935; Köhler, 1929; Metzger, 1941), a cui è stato riconosciuto il valore di fondatezza metodologica, all'interno delle scienze cognitive, per lo studio dell'esperienza percettiva (Kubovy, 2002) e sperimentalmente testata in studi condotti al fine di investigare l'esperienza diretta dello spazio (Bianchi, Savardi & Kubovy, 2011) e nelle ricerche miranti all'individuazione di criteri descrittivi validi, esaustivi e soprattutto generalizzabili per definire il comportamento espressivo di concentrazione (Ciabotti, Maltempi, 1982; Hamanui, Parodi, 1984).

Data la valenza metodologica della pratica interosservativa e dato il fatto che l'obiettivo della presente ricerca, consistente nell'indagare il ruolo dell'informazione percettiva nel processo di problem solving geometrico, risulta essere in linea con la prospettiva della fenomenologia sperimentale, si è scelto di utilizzare l'interosservazione, così come previsto (Bozzi 1978, 1989, 2002; Bozzi, Martinuzzi, 1989), dividendo i partecipanti in 80 gruppi di tre componenti ciascuno.

La scelta di utilizzare l'interosservazione è stata dettata anche da altre ragioni:

- 1) la superiorità del gruppo rispetto al singolo sia in compiti di soluzione di problemi (Laughlin, Bonner, Miner, 2002; Laughlin, Hatch, Silver, Boh, 2006) sia nella produzione di una descrizione maggiormente accurata del fenomeno sotto osservazione (Bozzi 1978, 1989, 2002; Bozzi, Martinuzzi, 1989; Bracco, Chiorri, Tarozi, Partena, 2008). La presenza di un piccolo gruppo, di tre partecipanti ciascuno, permette il superamento dell'effetto Asch (1968), dell'influenza cioè del gruppo sul singolo, in quanto i leaders orientano le decisioni collettive e le descrizioni dell'evento sotto osservazione verso un'osservazione maggiormente accurata e maggiormente aderente alla realtà percepita (Bracco, Chiorri, Tarozi, Partena, 2008).
- 2) la possibilità, durante una seduta interosservativa, di poter considerare più volte uno stesso aspetto modificando di volta in volta la risposta iniziale coincide con una delle caratteristiche del problem solving, in quanto processo non sequenziale e lineare in cui capita di dover ritornare a passaggi precedenti (Duncker, 1935/1945/1969);

- 3) dal momento che il problem solving è un processo e non una realtà già esistente, è necessario cogliere come questa configurazione si costruisce attraverso il dialogo tra i partecipanti (Turchi, 2009; Turchi, Celleghin, 2010).

L'interosservazione, in quanto metodologia sperimentale, è caratterizzata da determinate peculiarità che sono contrarie rispetto alle proprietà caratterizzanti l'esperimento classico (Bozzi 1978, 1989, 2002; Bozzi, Martinuzzi, 1989). Una prima caratteristica è data dalla modalità di presentazione dello stimolo: quest'ultimo, a differenza dell'ambiente spoglio e asettico che connota "l'atmosfera da laboratorio" entro cui l'evento percettivo viene studiato utilizzando l'esperimento classico, viene presentato ed indagato nel proprio ambiente naturale, dove ha luogo l'esperienza percettiva quotidiana, in quanto *"le proprietà di un fatto sono degne di attenzione se sfidano bene il rumore"* (Bozzi, 1978, p. 230). Il partecipante all'esperimento, inoltre, non deve essere tenuto all'oscuro dell'obiettivo della ricerca come avviene con la metodologia classica, ma deve essere considerato un collaboratore e pertanto deve conoscere ciò che si tenta di comprendere mediante la sua collaborazione; di conseguenza, affinché il suo contributo possa essere utile ai fini della ricerca, la sua attenzione deve essere focalizzata, mediante suggerimenti rispetto alla direzione da seguire, su quanto si vuole investigare, senza considerare altri aspetti che potrebbero venire richiamati durante l'osservazione della scena percettiva presentata. La consegna, anziché essere rigida ed univoca come nell'esperimento classico, deve essere duttile e flessibile al fine di consentire atteggiamenti osservativi differenti che possono far emergere un'esplorazione esauriente delle proprietà dell'evento sotto osservazione. Al partecipante, a differenza dell'esperimento classico, è consentito fornire più di una risposta di pari validità; anzi paradossalmente le impressioni successive acquistano un valore maggiore rispetto alla prima, in quanto l'osservatore ha assimilato in maniera più consona le richieste della consegna. Strettamente connesso a questo aspetto, è la possibilità, data ai partecipanti, di poter ritornare sui propri passi, in quanto l'attenzione prolungata permette l'osservazione del percolato maggiormente fine; al contrario nell'esperimento classico questa opportunità non era consentita. Infine, la risposta dell'osservatore deve essere libera e non essere

imbrigliata dentro schemi classificatori presenti nella testa dello sperimentatore, come invece avviene nell'esperimento classico.

La scelta, quindi, di utilizzare la metodologia interosservativa è data anche dall'adeguatezza delle caratteristiche che la contraddistinguono con quanto ci si è proposto di indagare con lo studio condotto, ossia in che modo l'attenzione e la manipolazione degli aspetti percettivi contrari, legati allo spazio, modifica il processo di soluzione di problemi spazio-geometrici.

#### **4.1.2 La contrarietà nella soluzione dei problemi presentati.**

Data la presenza della contrarietà nelle trasformazioni geometriche coinvolte nella soluzione di problemi geometrici, si è ipotizzato che anche il processo di soluzione dei problemi presentati consista in un processo di riorganizzazione costituito da trasformazioni geometriche implicanti variazioni degli aspetti percettivo-figurali entro contrari.

La scelta di utilizzare i problemi sopra elencati è dettata da una duplice ragione:

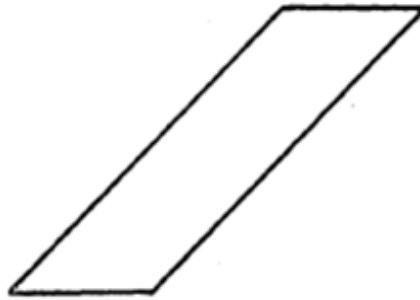
- 1) i problemi utilizzati costituiscono i classici materiali usati per stimolare processi di pensiero che implicano una riorganizzazione degli elementi che definiscono la situazione problematica portando pertanto al raggiungimento di soluzioni non basate sull'applicazione meccanica di conoscenze precedentemente acquisite;
- 2) i problemi utilizzati nello studio vengono altresì usati nelle prove annuali promosse dall'Invalsi e volte a valutare la competenza matematica degli alunni dei vari ordini di scuole.

Di seguito verranno quindi analizzati i problemi presentati e le rispettive soluzioni focalizzando l'attenzione sulle modifiche che le proprietà percettive, definenti la situazione problematica iniziale, devono subire durante il processo di soluzione.

Il primo problema considerato è quello del parallelogramma di Wertheimer (1965); dal momento che questo autore presenta diverse versioni dello stesso problema, si è scelto di presentare la figura in verticale in modo da tale da evitare un elevato numero di risposte in cui viene richiamata

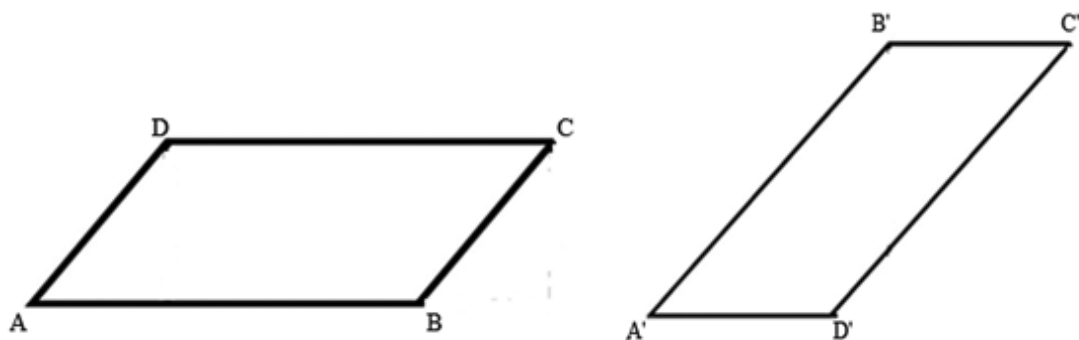


automaticamente la formula. Il compito, quindi, consiste nel trovare l'area della figura presentata e nella spiegazione del motivo per cui si procede nel modo indicato.



**Figura 16-** La figura rappresenta la forma geometrica che insieme al testo del problema costituisce la situazione problematica che i partecipanti si trovano a dover affrontare.

La soluzione implica prima di tutto l'identificazione della figura; si tratta cioè di riconoscere che le proprietà che costituiscono la figura ricordano quelle di un parallelogramma. Si deve quindi confrontare l'immagine visiva con l'immagine mentale del parallelogramma.



**Figura 17-** La figura mette a confronto il parallelogramma in orizzontale e quello in verticale.

Il confronto coinvolto nel processo di identificazione della forma geometrica presentata implica il riconoscimento della rotazione di un quarto di giro del parallelogramma in orizzontale dove le proprietà che connotano l'identità figurale sono state modificate nei loro opposti: i due lati più lunghi, AB e DC, da linee orizzontali sono diventate verticali e corrispondono ai lati A'B' e D'C'. I due lati corti, AD e BC, da verticali sono diventati lati orizzontali (A'D' e B'C').

Successivamente è necessario trasformare il parallelogrammo in un rettangolo, passando quindi da una forma instabile e pendente ad una forma stabile e dritta.

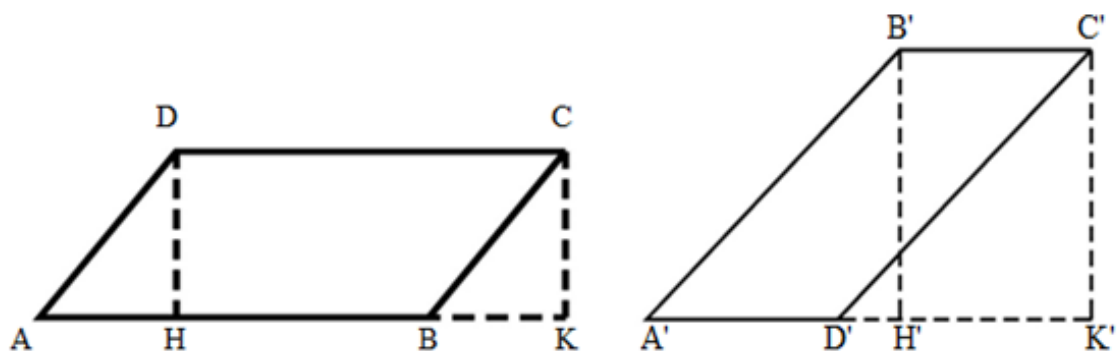
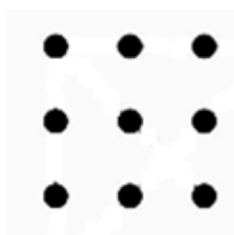


Figura 18 - La figura presenta la trasformazione delle due versioni del parallelogramma in un rettangolo.

Il parallelogramma in orizzontale ABCD deve, quindi, essere trasformato nel rettangolo DHKC; tale cambiamento è dato da variazioni contrarie delle proprietà fenomeniche del parallelogrammo. In primo luogo si devono tracciare due linee rette verticali dai vertici D e C che risultano essere parallele tra di loro, ma perpendicolari alla base orizzontale AB. Si tratta successivamente di prolungare quest'ultima (AB) aggiungendo un segmento orizzontale (BK) che parte da sinistra e prosegue verso destra fino al punto d'incontro con la perpendicolare verticale tracciata partendo dal vertice C. In questo modo si vengono a creare due triangoli uno a destra ed uno a sinistra: ADH è interno al parallelogramma, di cui è parte; mentre BKC è esterno. Considerando i due triangoli in vista della trasformazione della figura in un rettangolo, il triangolo ADH sembra essere una parte in eccesso, mentre il triangolo BKC costituisce una parte mancante; pertanto traslando da sinistra a destra il triangolo ADH si aggiunge alla figura in fieri il triangolo BKC che da figura esterna nella situazione originale diventa figura interna nel rettangolo. La linea verticale DH da interna nel parallelogramma diventa la linea esterna CK, che rappresenta una parte del contorno della nuova figura creata. Si arriva, quindi, alla formazione del rettangolo DHKC che è congruente al parallelogramma ABCD.

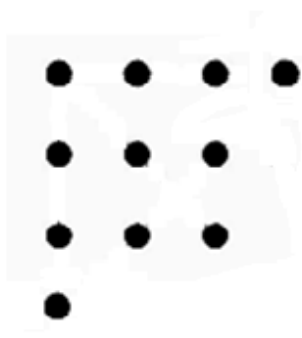
Il procedimento di trasformazione del parallelogramma in verticale (A'B'C'D') nel rettangolo D'H'K'C' è congruente con quello appena descritto. Anche in questo caso si devono tracciare due linee rette verticali, B'H' e C'K', che sono parallele tra di loro, ma perpendicolari alla base A'D'. La differenza è data dal fatto che la perpendicolare B'H', incontra la linea orizzontale formata dalla base non all'interno della figura ma all'esterno risultando, quindi, spostata a destra del parallelogramma. Si deve, inoltre prolungare la base A'D' aggiungendo il segmento orizzontale D'K'. Vengono così a crearsi due triangoli: uno a sinistra A'B'H' e uno a destra D'C'K'; il primo, a differenza del triangolo sinistro nel caso del parallelogramma in orizzontale, non è completamente interno alla figura iniziale, ma esce di poco dal perimetro figurale. Traslando il triangolo sinistro A'B'H' a destra del parallelogramma si viene a formare il triangolo D'C'K' che è esterno al parallelogramma e si sovrappone in parte al triangolo A'B'H'. La linea B'H' da quasi interamente interna diventa la linea esterna C'K', che è parte del contorno della nuova figura. Si viene quindi a formare il rettangolo D'H'K'C', che è congruente con il parallelogramma A'B'C'D' e che rappresenta una rotazione di un quarto di giro del rettangolo che si viene a formare quando il parallelogramma è disposto orizzontalmente: i lati più corti, infatti, in questo costituiscono le due basi orizzontali, mentre i due lati più lunghi, posizionati verticalmente, rappresentano le altezze della figura.

Il problema dei nove punti di Maier (1930) fa parte dei problemi proposti ai partecipanti. Il problema è così formulato: *“Vi vengono dati nove punti per i quali devono essere tracciate quattro linee rette in modo tale che passino attraverso tutti i punti. La matita non deve mai staccarsi dal foglio e nessuna linea deve essere ritracciata”*.



**Figura 19-** La figura rappresenta i nove punti da unire con quattro linee rette

Per poter risolvere il problema è necessaria una trasformazione contraria dello spazio: da uno spazio limitato, in quanto la disposizione dei nove punti crea un quadrato in cui è possibile identificare uno spazio interno, occupato da alcuni dei nove punti, e uno esterno, vuoto, ad uno illimitato. Si deve inoltre passare da una situazione di simmetria, dove ogni riga ed ogni colonna contengono lo stesso numero di punti, ad una di asimmetria, dove si deve immaginare la presenza di un punto più a destra nella prima riga in alto e in basso nella prima colonna a sinistra. Il prolungamento della prima riga e della prima colonna a sinistra coincide con una linea obliqua che congiunge il punto a sinistra più in basso e il punto a destra in alto; questa diagonale rappresenta la simmetria assiale rispetto al primo e al terzo quadrante che lega i due punti del prolungamento. I due punti aggiuntivi quindi sono simmetrici rispetto alla diagonale del secondo e del quarto quadrante.



**Figura 20-** L'immagine rappresenta la situazione asimmetrica che si viene a creare con l'aggiunta dei due punti.

Inoltre, il percorso di soluzione, che deve essere compiuto al fine di unire i nove punti con quattro linee rette, implica alcune proprietà contrarie in quanto comprende: due linee diagonali, aventi direzioni contrarie, precisamente la diagonale del primo e del terzo quadrante, da sinistra in basso a destra in alto e la diagonale del secondo e quarto quadrante da destra in basso a sinistra in alto, che si intersecano nel punto centrale; e due linee rette, di cui una orizzontale, da sinistra a destra, e una verticale, dall'alto in basso.

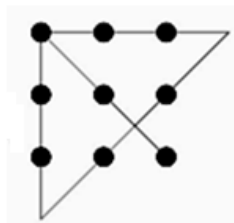


Figura 21- La figura mostra il percorso di soluzione del problema dei nove punti

Il terzo problema preso in considerazione è il problema delle anatre (Harrower, 1932), avente la seguente formulazione: *“Sotto un ponte passano nuotando due anatre davanti a due anatre, due anatre dietro a due anatre, e due anatre in mezzo. Quante anatre ci sono in tutto?”*

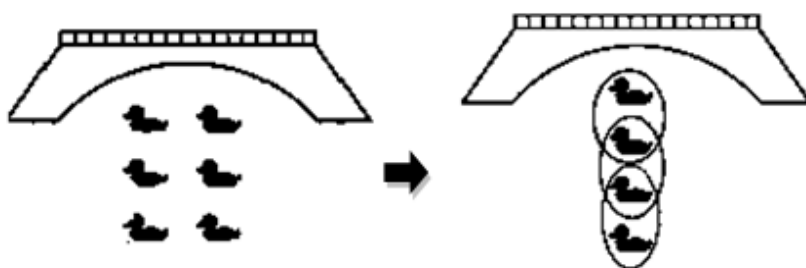
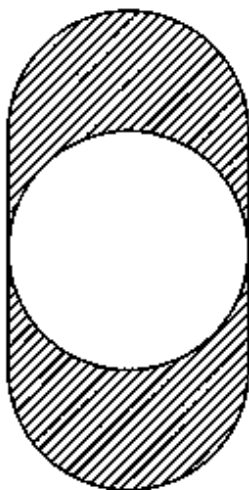


Figura 22- La figura mostra: a sinistra la soluzione più intuitiva di sei anatre che viene suggerita leggendo il testo del problema, a destra la soluzione più creativa di quattro anatre.

Per arrivare alla soluzione di quattro anatre, una in fila all'altra, si devono compiere alcune operazioni che implicano la contrarietà. Deve essere applicata in primo luogo una rotazione di un quarto di giro: la coppia di anatre orizzontale, in cui ciascun elemento è a fianco dell'altro, deve essere in posizione in verticale; al contrario il ponte da verticale deve essere posto in orizzontale.

Inoltre, ogni anatra deve essere considerata come elemento singolo; questo permette di cogliere il fatto che nella soluzione di quattro anatre sono presenti tutte le coppie citate dal problema: la coppia centrale è formata da due elementi che appartengono contemporaneamente ad un'altra coppia: la prima anatra appartiene alla coppia sopra (prima coppia), la seconda appartiene alla coppia in basso (terza coppia).

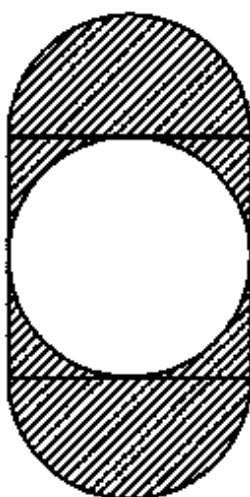
La finestra dell'altare (Wertheimer, 1965) è un altro problema proposto ai partecipanti, la cui formulazione consiste: *“Alcuni pittori stanno lavorando: dipingono e decorano le pareti interne di una chiesa. A una certa altezza sopra l'altare vi è una finestra circolare. Come decorazione è stato chiesto ai pittori di tracciare due linee verticali tangenti al cerchio, che abbiano la stessa altezza di questa finestra circolare; poi di aggiungere due semicerchi sopra e sotto, per chiudere la figura. L'area compresa tra le linee e la finestra deve venir ricoperta d'oro; per ogni centimetro quadrato c'è bisogno di tanto e tanto oro. Di quanto oro ci sarà bisogno per ricoprire questo spazio dato il diametro del cerchio? Qual è l'area dello spazio tra il cerchio e le linee?”*



**Figura 23-** La figura mostra la situazione problematica; l'area tratteggiata corrisponde all'area da ricoprire d'oro.

La soluzione di questo problema consiste nel cogliere che l'area da ricoprire d'oro corrisponde a quella del quadrato in cui il cerchio centrale risulta essere inscritto; essa comporta cambiamenti entro contrari. I due semicerchi che chiudono la figura devono essere traslati: il semicerchio in alto viene spostato verso il basso e fatto coincidere con la parte alta del cerchio centrale; il semicerchio in basso viene spostato verso l'alto e fatto coincidere con la metà inferiore del cerchio centrale. I due semicerchi risultano essere capovolti l'uno rispetto all'altro attraverso una simmetria di centro O. Successivamente deve avvenire una traslazione delle semilunette affinché si venga a creare un quadrato: le due semilunette in alto vengono spostate verso il basso e formano i due angoli superiori del quadrato in cui il cerchio è inscritto. Le due semilunette in basso vengono, invece, spostate

verso l'alto, formando in questo modo i due angoli in basso del quadrato in cui il cerchio è inscritto. Si devono, inoltre, tracciare le due tangenti orizzontali che insieme alle tangenti verticali delimitano la figura: le prime costituiscono i lati sopra e sotto, mentre le seconde rappresentano i lati destro e sinistro. Il quadrato, che si viene a formare, è internamente composto dai seguenti elementi: le quattro semilunette, che in origine costituivano le parti finali dei due semicerchi ed erano sotto di essi ora si trovano sopra ai due semicerchi centrali delimitando l'area del quadrato, e il cerchio centrale, formato dai due semicerchi. Guardando la composizione del quadrato, esiste una simmetria assiale rispetto all'asse x: gli elementi che compongono il quadrato risultano essere simmetrici tra di loro. La parte superiore del quadrato è simmetrica rispetto all'asse x alla parte inferiore: il semicerchio in alto e le due semilunette in alto sono simmetriche rispetto al semicerchio e alle semilunette in basso.



**Figura 24-** La figura mostra la formazione del quadrato, la cui area corrisponde all'area da ricoprire d'oro.

Il penultimo problema esaminato è dato dal problema del quadrato (Kanizsa, 1973), avente la seguente formulazione: *“Costruire un quadrato mediante la giustapposizione dei seguenti sei pezzi: quattro triangoli rettangoli isosceli uguali tra loro e due trapezi retti di uguale altezza ma con basi di lunghezza diversa”*.

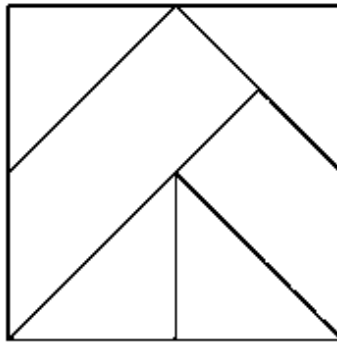


**Figura 25-** La figura rappresenta le sei forme geometriche da utilizzare nella costruzione del quadrato.

La richiesta del problema implica in sé stessa una relazione di contrarietà, in quanto si passa da una situazione in cui sono presenti diverse figure geometriche separate ad una in cui vi è un'unica forma costituita dalle figure originali. Per arrivare alla situazione finale, sono necessarie diverse trasformazioni geometriche che comportano la contrarizzazione delle proprietà che definiscono la situazione problematica. In primo luogo si tratta di operare una simmetria assiale all'asse x: due dei quattro triangoli isosceli vengono capovolti, pertanto il loro lato orizzontale in basso rimane orizzontale ma risulta essere spostato in alto. Allo stesso modo anche l'angolo di  $90^\circ$  che era in basso viene a trovarsi in alto; mentre l'angolo in alto che costituisce il vertice del triangolo ed è formato dal lato verticale e da quello obliquo, viene rivolto verso il basso. Uno dei triangoli appena ruotati subisce un'ulteriore rotazione, venendosi a trovare in una posizione contraria rispetto all'altro. L'angolo del triangolo che subito due rotazioni, formato dalla base orizzontale e dal lato obliquo, che nella situazione originaria era in basso, risulta ora in alto. Gli angoli di questi due triangoli, formati dalla base e dal lato obliquo, in seguito a questa ulteriore rotazione, vengono a toccarsi nella nuova configurazione. Gli angoli di  $90^\circ$  formano rispettivamente l'angolo sinistro e l'angolo destro del quadrato; le basi, che si trovavano in basso, formano il lato superiore del quadrato; mentre le due altezze formano una parte di lati sinistro e destro del quadrato. I restanti due triangoli vengono posizionati in maniera completamente differente rispetto agli altri due triangoli e vanno a formare il lato inferiore del quadrato. Uno dei due triangoli rimanenti con una simmetria rispetto all'asse y viene girato maniera opposta rispetto alla posizione originale e rispetto all'altro

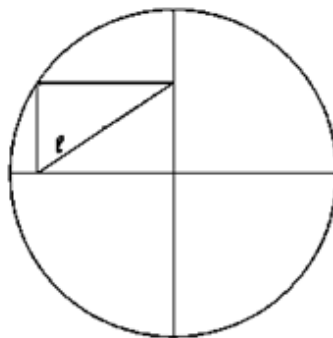


triangolo: l'altezza e l'angolo di  $90^\circ$  da destra vengono spostati a sinistra; l'angolo alla base e il lato obliquo da sinistra vengono spostati a destra. Nel quadrato, quindi questi due triangoli, rivolti in maniera opposta l'un l'altro (uno verso sinistra e l'altro verso destra), anziché toccarsi leggermente come i triangoli posizionati in alto, risultano avere un lato in comune (l'altezza) e le due basi formano il lato inferiore del quadrato. Si devono operare trasformazioni geometriche sulla posizione dei due trapezi. In prima istanza deve essere compiuta una simmetria assiale rispetto all'asse che permette di capovolgere i due trapezi. In questo modo si ottengono i seguenti cambiamenti: la punta di queste due figure, che in origine era rivolta prima verso l'alto, ora è rivolta verso il basso; la base che si trovava in basso, viene a trovarsi in alto; i due lati obliqui che andavano dal basso verso l'alto, ora hanno una direzione contraria (dall'alto verso il basso). Si deve, inoltre applicare una rotazione di  $45^\circ$  gradi: il trapezio lungo viene ruotato di  $45^\circ$  verso sinistra in modo che il lato obliquo formi una parte del lato verticale sinistro del quadrato; l'altezza viene a coincidere con una parte del lato obliquo del triangolo in alto a destra; le due basi da lati retti diventano lati obliqui e quella più corta viene a coincidere con il lato obliquo del triangolo in alto a sinistra, mentre quella più lunga raggiunge il margine inferiore sinistro del quadrato. Il trapezio corto, con una simmetria rispetto all'asse y, viene ruotato da sinistra verso destra e quindi la base corta e il lato obliquo da sinistra vengono a trovarsi nella nuova situazione a destra; la base lunga invece da destra risulta essere a sinistra. Infine, il trapezio corto viene ulteriormente ruotato di  $45^\circ$  gradi verso destra ottenendo una posizione contraria rispetto al trapezio lungo. Il lato obliquo di questo trapezio forma una parte del lato verticale destro del quadrato; le due basi da rette vengono in posizione in obliquo: la base corta viene a coincidere con una parte del lato obliquo del triangolo in alto a destra e la base lunga coincide con il lato obliquo del triangolo in basso a destra; l'altezza del trapezio corto viene a coincidere con una parte della base più lunga del trapezio lungo.



**Figura 26-** La figura mostra la soluzione del problema del quadrato.

L'ultimo problema considerato è il problema della circonferenza (Köhler, 1969), avente la seguente formulazione: *“Si dia un cerchio con raggio  $r$ , e in questo cerchio costruiamo un rettangolo. Se tracciamo la linea  $l$  dentro al rettangolo, qual è la lunghezza della linea?”*



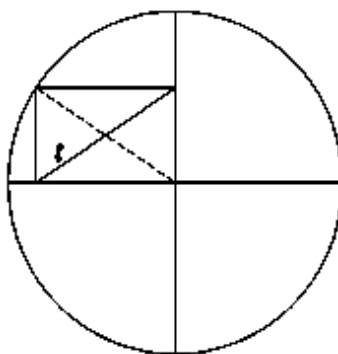
**Figura 27-** La figura rappresenta la situazione problematica.

Anche in questo caso la soluzione è costituita da trasformazioni geometriche che comportano la contrarizzazione delle proprietà fenomeniche che definiscono la situazione problematica.

Inizialmente è necessario prendere in considerazione il quadrante in cui è disegnata la figura e scegliere uno tra i due raggi (verticale e orizzontale), retti che delimitano il quadrante in cui la figura è inscritta. Il raggio scelto viene fatto ruotare di  $45^\circ$  gradi inclinandolo: se il raggio scelto è quello verticale, questo viene fatto girare in senso antiorario da destra verso sinistra e dall'alto verso il basso; se si sceglie il raggio orizzontale, questo viene ruotato in senso orario da sinistra a destra e

dal basso verso l'alto. In questo modo viene tracciata una linea che coincide con una parte della diagonale del secondo e del quarto quadrante che dall'interno del cerchio (dal centro) va verso l'esterno toccando un punto sulla circonferenza.

Successivamente ruotando in senso antiorario, da destra verso sinistra, i due triangoli rettangoli isosceli che compongono la figura originale, si nota che questi sono congruenti e coincidono con i due triangoli creati dopo aver tracciato il raggio obliquo; la linea  $l$  coincide quindi con il raggio in quanto rappresenta la sua simmetrica e in quanto la figura disegnata è un rettangolo e le due diagonali del rettangolo sono uguali. La linea  $l$ , infatti, è la diagonale del rettangolo che va da sinistra a destra e coincide in parte con la diagonale del primo e del terzo quadrante; mentre il raggio obliquo è la diagonale del rettangolo che va da destra a sinistra e coincide in parte con la diagonale del secondo e del quarto quadrante. Le due diagonali, inoltre, dividono la figura rispettivamente in due triangoli che risultano essere simmetrici: la linea  $l$  divide la figura in due triangoli che sono simmetrici rispetto alla diagonale del primo e del terzo quadrante; il raggio che coincide con l'altra diagonale divide il rettangolo in altrettanti due triangoli che sono simmetrici rispetto alla diagonale del secondo e del quarto quadrante. Unendo le due diagonali si formano quattro triangoli: i due triangoli (sopra e sotto) risultano essere capovolti attraverso una simmetria di centro  $O$ ; mentre gli altri due (sinistro e destro) sono simmetrici rispetto all'asse  $y$ .



**Figura 28-** La figura rappresenta la soluzione del problema della circonferenza in cui è stato tracciato il lato obliquo che corrisponde alla diagonale.

## **4.2 Descrizione delle variabili utilizzate.**

Dopo aver delineato il disegno sperimentale e gli elementi di cui si compone, verranno ora presentate le variabili prese in considerazione al fine di descrivere il modo in cui il processamento di aspetti percettivo-figurali contrari legati allo spazio influenza il processo di problem solving geometrico.

La prima variabile considerata è il tempo di soluzione. La seduta sperimentale è stata suddivisa in diversi intervalli temporali corrispondenti alle diverse fasi che corrispondono ai diversi momenti del processo di soluzione di un problema, al fine di consentire un confronto del tempo utilizzato dai partecipanti per risolvere ciascun problema:  $t_0$ , rappresenta la durata della lettura delle istruzioni che precedono la presentazione dei sei problemi;  $t_1$  costituisce il momento di lettura del testo del problema;  $t_2$  comprende l'intervallo di tempo tra la fine della lettura del testo del problema e l'inizio dell'interazione tra i partecipanti che determina, per due condizioni l'inizio della ricerca dei contrari, mentre per le altre due l'inizio della fase di ricerca della soluzione;  $t_{3_1}$ , corrisponde alla durata della fase di ricerca dei contrari prima della ricerca della soluzione, considerata solamente per i gruppi appartenenti a due condizioni (quella dei contrari impliciti e quella dei contrari espliciti);  $t_{3_2}$ , coincide con la fase di ricerca della soluzione ai problemi presentati. Si è pensato quindi confrontare la durata della fase di ricerca della condizione per indagare l'influenza dei contrari sul tempo utilizzato dai gruppi per risolvere i problemi.

La seconda variabile considerata è rappresentata dalle emozioni, manifestate mediante le espressioni facciali (Algoe, Fredrikson, 2011; Eakman, Oster, 1979; Hess, Thibault, 2009; Oatley, 1997; Young, Hugenberg, 2010), espresse dai partecipanti durante la fase di ricerca della soluzione; in particolare, in accordo con gli studi del settore che hanno distinto le emozioni in positive e negative (Algoe, Fredrikson, 2011; Eakman, Oster, 1979; Hess, Thibault, 2009; Oatley, 1997; Young, Hugenberg, 2010), è stato confrontato il numero di emozioni positive, date dal numero di sorrisi, di espressioni di meraviglia e di sorpresa, di esclamazioni di gioia e di espressioni facciali positive caratterizzate dal sollevamento delle sopracciglia e dal luccichio del occhi, e il numero di

emozioni negative, comprendenti il numero di sbuffi, di espressioni di smarrimento, di finti sorrisi, di espressioni di dubbio e di espressioni di rabbia, espresse dai partecipanti appartenenti alle diverse condizioni sperimentali per indagare l'influenza di un pensiero stimolato dall'attenzione alle proprietà spaziali contrarie sulle emozioni manifestate. La codifica di questa variabile ha compreso una fase di addestramento coinvolgendo due giudici esperti. In primo luogo vi è stato un incontro per stabilire i criteri da adottare per la codifica; successivamente i due giudici hanno codificato in maniera indipendente tre video corrispondenti a tre diverse sedute sperimentali. Sulle codifiche effettuate è stato valutato l'accordo e il disaccordo calcolando l'indice di accordo (K di Cohen). L'indice di accordo calcolato corrisponde al valore percentuale dell'81% che esprime un accordo considerevole.

Un'altra variabile considerata è il processo di soluzione, in particolare il modo in cui la manipolazione di variabili spaziali contrarie ha influenzato le strategie utilizzate dai partecipanti per risolvere i sei problemi presentati. La rilevazione della tipologia delle tecniche risolutive adottate dai gruppi è avvenuta mediante l'analisi degli scambi dialogici tra i tre componenti di ciascun gruppo impegnato nella soluzione dei problemi. Inizialmente i dialoghi sono stati trascritti secondo un set di regole convenzionali utilizzate per le trascrizioni (Edwards, 1997; Gilbert, 1993; Potter, 1996); sul testo scritto è stata compiuta un'analisi del contenuto. La codifica del contenuto dialogico, rivelante le strategie di volta in volta utilizzate dai vari gruppi per risolvere i problemi, è avvenuta mediante l'utilizzo di una versione adattata del "Thinking Aloud Coding Scheme" (Hoffman & Lintern 2006; Rasmussen, Pejtersen, & Schmidt 1990). Si tratta di uno schema utilizzato nel campo del Work Analysis (Rasmussen, Petjersen, & Goodstein, 1994; Rasmussen, 1985), interessata allo studio della performance ad alti livelli di abilità in diversi settori, quali l'ingegneria, l'aviazione, la progettazione di sistemi di sicurezza, mediante l'utilizzo di interviste agli esperti affinché questi ultimi esplicitino le loro conoscenze riguardanti l'ambito di loro competenza. Si tratta, pertanto, di uno strumento volto ad indagare il processo di ragionamento finalizzato al raggiungimento di un obiettivo e consistente in diverse strategie e passaggi che

vengono compiuti al fine di ottenere il risultato prefissato. Questo schema di codifica comprende due livelli analisi, identificati da due dimensioni: l'Astrazione e la Decomposizione. La prima indica una relazione mezzi-fini e si riferisce ai diversi livelli di astrazione o di concretezza delle funzioni utilizzate al fine di raggiungere l'obiettivo: il grado più alto di astrazione si trova nella parte alta dello schema; mentre il livello più basso, rappresentato dalla concretezza, occupa la parte bassa dello schema e tra questi due livelli si collocano gli stati intermedi. La decomposizione si riferisce all'ampiezza del contesto organizzativo che viene coinvolto per svolgere una determinata funzione; se per esempio è necessario il coinvolgimento dell'intero complesso organizzativo, oppure team di lavoro o solamente alcuni individui.

La versione utilizzata per la codifica dei dialoghi ha mantenuto la medesima struttura. Essa è costituita da una tabella a doppia entrata, comprendente due livelli di analisi: la relazione astratto-concreto, in riga, e la relazione tutto- parte, in colonna (cfr. appendice). La prima si riferisce all'astrattezza/ concretezza delle strategie utilizzate dai partecipanti per risolvere i problemi presentati e comprende cinque categorie: l'obiettivo, rappresentato dalla domanda del problema; l'enunciazione di mezzi/ passaggi per raggiungere l'obiettivo, costituito dall'individuazione di un possibile percorso al fine di raggiungere la soluzione, dalla ricerca di informazioni utili, dalla rilettura e dalla riformulazione del problema o di una sua parte; l'applicazione di regole, in termini sia di formule matematiche sia di autoistruzioni che i partecipanti, pur non contenute nel testo del problema, si auto- impongono; l'applicazione di regole visibili, riferita ai casi in cui la strategia contempla elementi che vengono colti percettivamente e che derivano sia da conoscenze possedute dai partecipanti sia da informazioni acquisite durante il processo di soluzione (ad esempio rileggendo il testo del problema o mediante l'utilizzo del righello); l'applicazione di descrizioni o operazioni visive, riguardante i casi in cui la strategia è rappresentata da una descrizione di quanto visivamente appare sul foglio oppure da operazioni figurali che vengono suggerite dal materiale rappresentato. La relazione tutto- parte indica l'ampiezza del campo di applicazione di una determinata strategia e comprende cinque livelli: il "tutto", indicante i casi in cui la strategia considerata implica il

coinvolgimento di tutta la situazione problematica; la “parte”, riguardante le situazioni in cui la strategia risolutiva prende in considerazione solo un elemento del problema; il “tutto- parte”, riferito ai casi in cui la strategia viene applicata alla relazione esistente tra il problema e una sua componente; il “tutto-tutto”, indicante le situazioni in cui i partecipanti confrontano la situazione problematica presentata con un’ipotetica situazione immaginata; la “parte-parte” riferita ai casi in cui la strategia si applica alla relazione tra due o più elementi del problema.

L’adattamento della tabella è stato concordato con un secondo codificatore esperto, che ha svolto questo ruolo per la durata dell’addestramento comprendente tre momenti: a) identificazione della struttura e delle diverse componenti dello schema di codifica da utilizzare; b) codifica separata di 18 problemi (3 codifiche per ciascun problema); c) confronto delle codifiche effettuate in maniera individuale per verificare sia l’accordo tra i due giudici sia per una discussione rispetto all’adeguatezza o meno dello strumento. Quest’ultimo passaggio è consistito sia in un momento di discussione riguardante la validità dello strumento e le relative problematiche connesse al suo utilizzo sia nel calcolo del K di Cohen, dove è stato calcolato l’indice di accordo sulla base delle codifiche svolte singolarmente. Questo calcolo è stato effettuato mediante una tabella in cui venivano riportati i casi in cui vi era accordo, cioè entrambi i giudici avevano codificato la frase rivelante la strategia utilizzata nello stesso modo, e le situazioni di disaccordo, in cui i giudici avevano codificato la frase rivelante la strategia utilizzata in modo differente. La percentuale di accordo calcolata è l’80%, indicante un considerevole grado di accordo. Dato questo risultato, la fase di codifica è stata svolta successivamente da un solo giudice.

In accordo con la classificazione operata da MacNeil (1996) e largamente utilizzata dagli studi riguardanti i gesti coinvolti nel processo di soluzione di problemi matematici (Edwards, 2009; Radford, Edwards, & Arzarello, 2009; Francaviglia, Servidio, 2011) sono state inoltre presi in esame le diverse tipologie di gesti che hanno accompagnato il processo di soluzione, distinti in: gesti iconici, in cui i gesti illustrano quanto viene espresso a parole; gesti deittici, utilizzare per indicare e per dirigere l’attenzione dell’ascoltatore verso una determinata parte del problema; gesti

regolatori, in cui i gesti vengono utilizzati come supporto alla comunicazione, come ad esempio il movimento del capo per indicare l'accordo con quanto viene detto; e gesti adattivi, riferiti a gesti che non vengono utilizzati intenzionalmente durante l'interazione, ma servono per equilibrare lo stato emotivo interno della persona che compie il gesto; un esempio è dato dal toccarsi parti del corpo. Anche in questo caso la codifica ha compreso una fase di addestramento coinvolgendo due giudici esperti. In primo luogo vi è stato un incontro per stabilire i criteri da adottare per la codifica; successivamente i due giudici hanno codificato in maniera indipendente tre video corrispondenti a tre diverse sedute sperimentali. Sulle codifiche effettuate è stato valutato l'accordo e il disaccordo calcolando l'indice di accordo (K di Cohen). L'indice di accordo calcolato corrisponde al valore percentuale dell'83% che esprime un accordo considerevole.

Infine, sono state prese in considerazione le soluzioni fornite ai problemi presentati. Esse sono state distinte in cinque categorie: nessuna soluzione, quando i partecipanti non fornivano alcuna soluzione al problema; soluzioni corrette percettive, cioè soluzioni corrette basate su trasformazioni percettive dello spazio, come scomposizioni figurali, rotazioni, traslazioni, simmetrie di elementi; soluzioni corrette nozionistiche, cioè soluzioni corrette basate sull'applicazione di nozioni e di formule matematiche; soluzioni non corrette percettive, ossia soluzioni sbagliate basate su trasformazioni percettive dello spazio; soluzione non corrette nozionistiche, cioè soluzioni sbagliate basate sull'applicazione di nozioni o di formule matematiche. In base a questa classificazione, i problemi presentati possono essere distinti in due gruppi: problemi percettivi, rappresentati dal problema dei nove punti (Maier, 1930), delle anatre (Harrower, 1932), e del quadrato (Kanizsa, 1973), che ammettono solamente la soluzione percettiva, basata quindi su trasformazioni dello spazio, e problemi aventi una duplice soluzione, dati dal problema del parallelogramma (Wertheimer, 1965), della finestra dell'altare (Wertheimer, 1965) e della circonferenza (Köhler, 1971), per i quali cioè è ammessa sia la soluzione percettiva che nozionistica. Anche in questo caso la codifica ha previsto una fase di addestramento coinvolgendo due giudici esperti per stabilire i criteri di distinzione delle diverse tipologie di soluzione. Successivamente è avvenuta la codifica



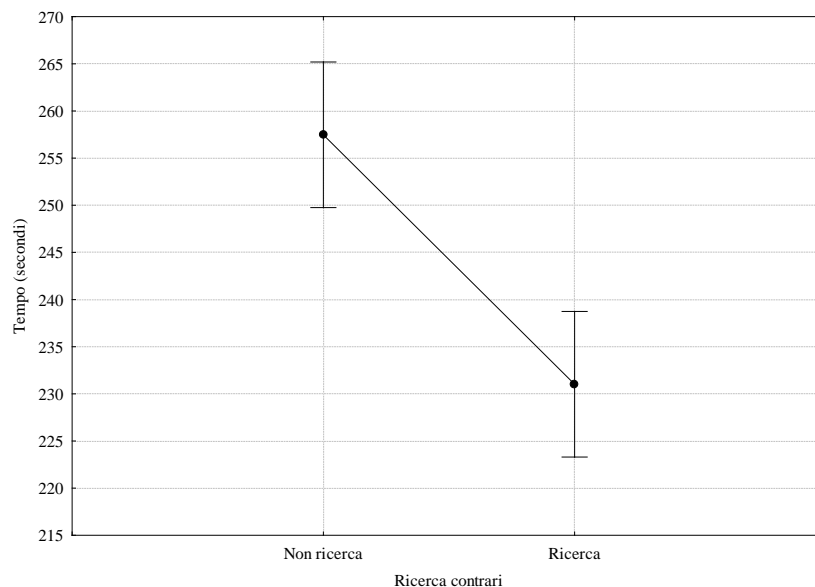
indipendente da parte dei due giudici di 18 soluzioni che i partecipanti hanno fornito ai problemi (3 per ciascun problema). Sulle codifiche effettuate è stato calcolato l'indice di accordo (K di Cohen); il cui valore rappresentato dalla percentuale 80% indica un considerevole accordo.

### 4.3 I risultati.

*Tempo di soluzione.* La prima variabile presa in considerazione è il tempo di soluzione, cioè il tempo impiegato dai partecipanti per risolvere ciascuno dei sei problemi presentati.

Confrontando i tempi di soluzione, mediante un'ANOVA a misure ripetute prendendo in considerazione i due fattori, "Ricerca contrari" e "Suggerimento", e il fattore "Problema", risultano significativi i tre fattori considerati sul tempo di soluzione: "Ricerca Contrari",  $F(1, 5.875)$ ,  $p=0.01$ ; "Suggerimento",  $F(1, 4.947)$ ; "Problemi",  $F(5, 55.787)$ ,  $p=0.00$ .

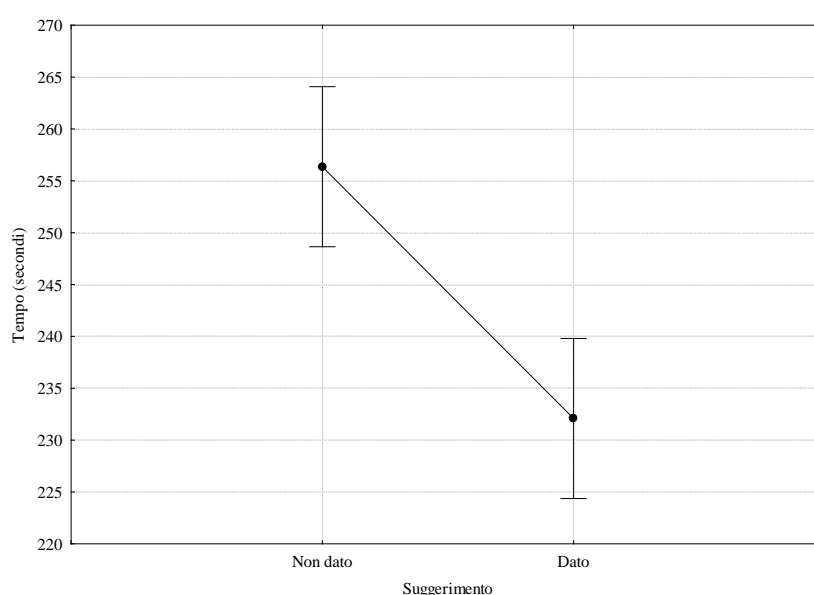
Il fattore "Ricerca Contrari", riferito alla distinzione delle condizioni in base alla presenza o meno della richiesta di cercare i contrari spaziali prima di risolvere il problema, influisce in maniera significativa sulle differenze dei tempi di soluzione registrati.



**Figura 29-** Il grafico rappresenta il tempo di soluzione espresso in secondi confrontando il tempo impiegato dai gruppi appartenenti alle varie condizioni, distinti dal fattore "Ricerca contrari". Le etichette "Non ricerca" e "Ricerca" fanno riferimento rispettivamente alle condizioni in cui ai partecipanti non è stato chiesto di cercare i contrari prima di risolvere il problema e alle condizioni in cui ai partecipanti è stato chiesto di trovare i contrari spaziali prima di impegnarsi nella soluzione del problema.

Dal grafico (cfr. figura 29) emerge che i gruppi a cui è stato richiesto di cercare i contrari spaziali presenti nel problema prima di risolvere il problema (condizione dei contrari impliciti ed espliciti) utilizzano meno tempo per risolvere i sei problemi presentati rispetto ai gruppi appartenenti alle rimanenti due condizioni.

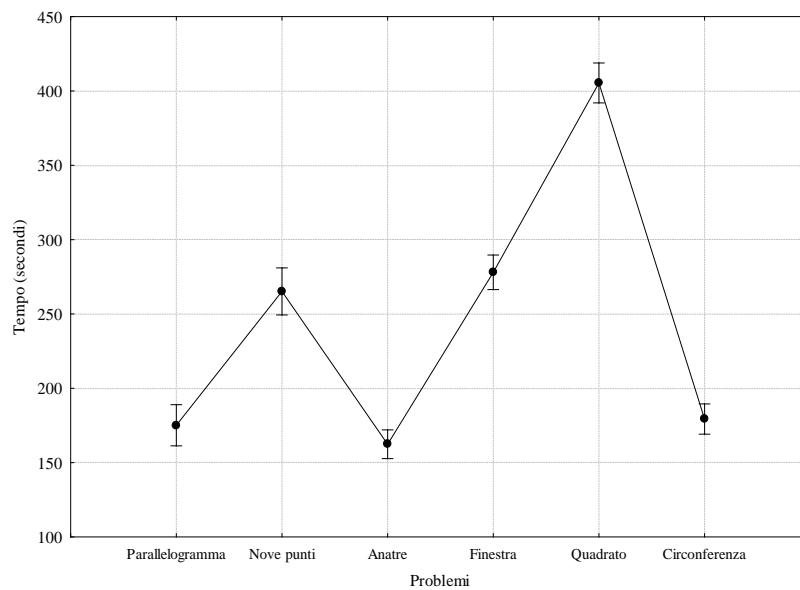
Al tempo stesso anche il fattore “Suggerimento”, indicante la distinzione delle condizioni in base alla presenza o meno dell’invito ad utilizzare determinate conoscenze per la soluzione del problema, influenza significativamente i tempi di soluzione



**Figura 30-** Il grafico mostra il tempo di soluzione espresso in secondi confrontando il tempo impiegato dai gruppi a cui è stato suggerito di utilizzare determinate conoscenze nella soluzione del problema (Dato) con il tempo impiegato dai gruppi a cui il suggerimento non è stato dato (Non dato).

I gruppi a cui è stato suggerito che i contrari avrebbero aiutato nella ricerca della soluzione e i gruppi a cui è stato chiesto di utilizzare le nozioni e le conoscenze acquisite in passato impiegano meno tempo per risolvere i problemi presentati rispetto ai gruppi in cui i partecipanti erano liberi di utilizzare le conoscenze che ritenevano opportune (cfr. figura 30). L’assenza di interazione tra i due fattori, “Ricerca contrari” e “Suggerimento”, suggerisce che i contrari espliciti, rappresentati dalla condizione in cui i partecipanti sono stati informati del loro possibile aiuto per la ricerca della soluzione, non agiscono in maniera significativamente diversa dalle nozioni, qualora esplicitamente richiamate, riducendo il tempo di soluzione utilizzato per risolvere i problemi.

Infine, anche il fattore “Problemi” influenza significativamente i tempi di soluzione.

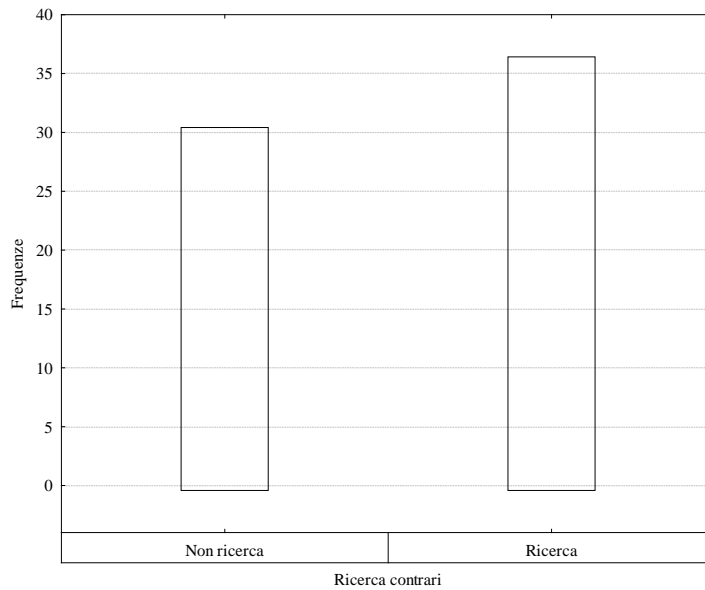


**Figura 31-** Il grafico mostra le differenze tra i tempi espressi in secondi impiegati per risolvere ciascuno dei sei problemi presentati.

La figura indica che il problema presentato influenza, aumentando o diminuendo, il tempo di soluzione utilizzato dai partecipanti per risolverlo. In generale il problema del parallelogramma, delle anatre e della circonferenza richiedono un minor tempo di soluzione; mentre il problema del quadrato richiede un maggior tempo di soluzione rispetto agli problemi. Questo significa che i problemi sono diversi e implicano differenti gradi di difficoltà.

*Emozioni.* La seconda variabile presa in considerazione è rappresentata dalle emozioni, in cui è stato registrato il numero di emozioni positive e negative che i partecipanti hanno manifestato durante il processo di soluzione (cfr. paragrafo 4.2). Il confronto sulle frequenze registrate è stato compiuto mediante una log lineare e prendendo in considerazione i fattori “Suggerimento”, “Ricerca contrari”, “Problemi” ed “Emozioni”.

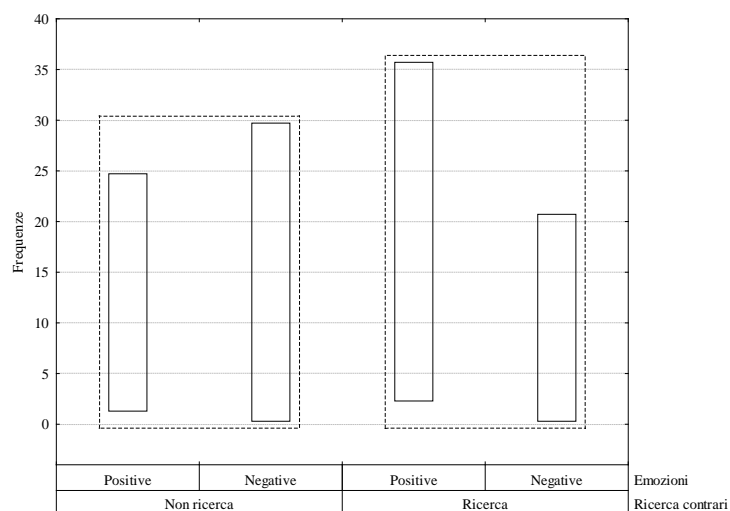
Il fattore “Ricerca contrari”, rappresentato dalla presenza o meno delle richiesta di cercare i contrari presenti nella soluzione del problema, influenza in maniera significativa le frequenze registrate,  $\chi^2(1) = 5.35372$ ;  $p = 0.02$



**Figura 32-** Il grafico mostra un confronto sulle gamme delle frequenze registrate tra i gruppi a cui è stato chiesto di cercare i contrari prima di risolvere il problema e i gruppi a cui non è stata fatta tale richiesta.

Dal grafico emerge che i gruppi a cui è stato chiesto di cercare i contrari prima di impegnarsi nella ricerca di una soluzione manifestano un maggior numero di emozioni rispetto ai gruppi appartenenti alle altre condizioni in cui tale richiesta non è stata fatta. La ricerca dei contrari, pertanto, produce un effetto significativo sulle emozioni, aumentando il numero di emozioni prodotte.

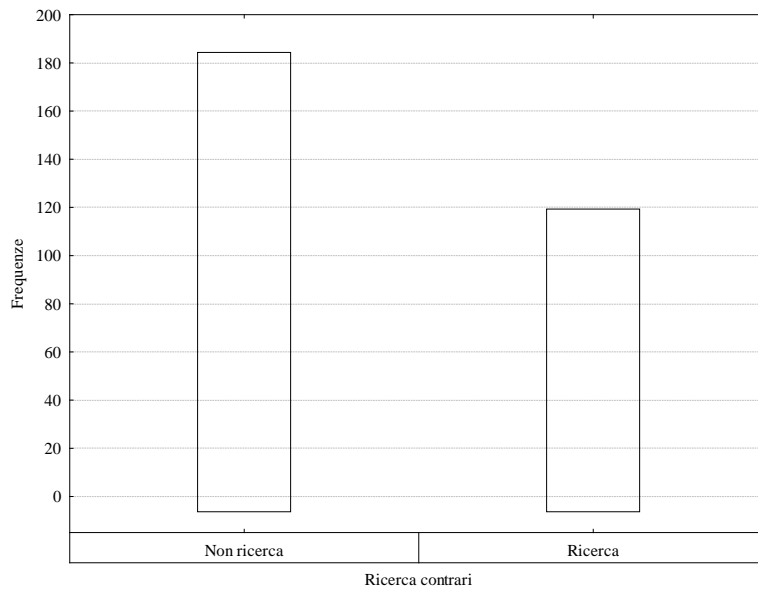
È stata inoltre registrata un'interazione significativa tra la “Ricerca dei contrari”\* le “Emozioni”,  $\chi^2(1) = 22.13470$ ;  $p = 0.00$ .



**Figura 33-** Il grafico mostra le differenze registrate tra i gruppi a cui è stato chiesto di cercare i contrari (Ricerca) e i gruppi a cui tale richiesta non è stata fatta (Non ricerca) rispetto alle gamme delle frequenze di emozioni positive e di emozioni negative.

I gruppi appartenenti alla condizione di ricerca dei contrari manifestano un maggior numero di emozioni positive rispetto ai gruppi a cui non era richiesto di cercare i contrari prima di risolvere il problema. Al contrario, i gruppi appartenenti alla condizione di “Non ricerca” esprimono maggiori emozioni negative rispetto ai gruppi della condizione di “Ricerca”. Analizzando la tipologia di emozioni prodotte all’interno di ciascuna condizione si registrano le seguenti situazioni: i gruppi nella condizione di “Ricerca” manifestano un maggior numero di emozioni positive rispetto al numero di emozioni negative; viceversa i gruppi nella condizione di “Non ricerca” producono più emozioni negative che positive. La maggior produzione di emozioni positive da parte dei gruppi appartenenti alla condizione di ricerca dei contrari indica l’attivazione da parte dei partecipanti di un processo di pensiero in un’atmosfera piacevole e positiva. I risultati rispetto al fattore “Problemi” non hanno indicato alcuna significatività; il tipo di problema presentato non influenza il vissuto emotivo manifestato dai partecipanti.

*Tipologia del processo.* È stato inoltre analizzato la tipologia del processo attivato, inteso in senso generale e indipendente dalla distinzione in strategie e dalla considerazione dell’ampiezza del focus di attenzione dei partecipanti nel momento in cui applicano una determinata strategia (“Tipo”; cfr. paragrafo 4.2) analizzando, mediante una log lineare, le frequenze ottenute. Il fattore “Ricerca contrari” influisce in maniera significativa le frequenze ottenute rispetto a questa variabile,  $\chi^2(1) = 22.4288$ ;  $p = 0.00$ .



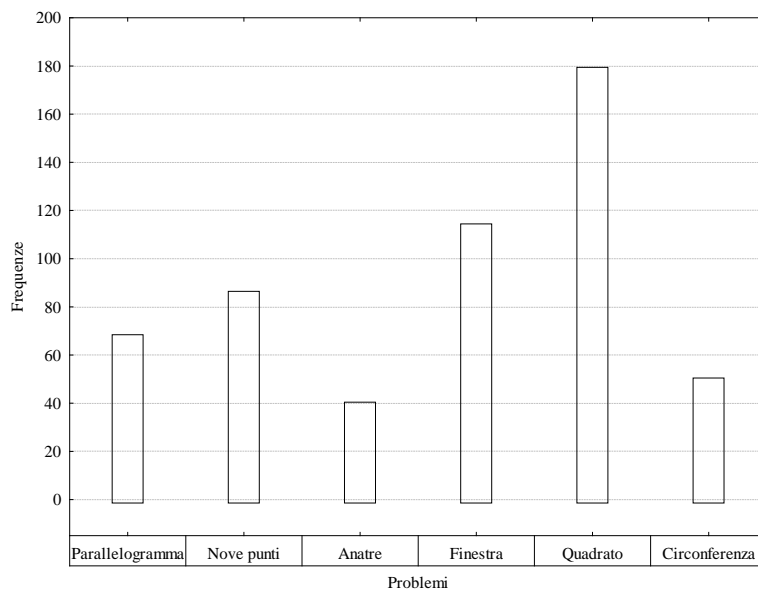
**Figura 34- Il grafico mostra la differenza tra le gamme delle frequenze ottenute nella condizione di ricerca dei contrari e in quella di non ricerca rispetto alla variabile rappresentata dal processo di soluzione.**

La ricerca dei contrari spaziali ha ridotto le frequenze registrate rispetto alla tipologia del processo attivato; di conseguenza rispetto alle frequenze ottenute in base al tipo di strategia utilizzata e all'ampiezza del range del problema preso in considerazione nel momento in cui viene applicata una determinata strategia. Questo potrebbe significare che la fase di ricerca dei contrari ha prodotto una riduzione del numero di comportamenti non adeguati ai fini della soluzione, diminuendo lo sviluppo di percorsi ciechi e l'utilizzo di una procedura per prove ed errori, in quanto i partecipanti, essendo più vincolati alla struttura fenomenica del problema, hanno attivato un processo di soluzione maggiormente aderente a quest'ultima, così come auspicato dalla psicologia della Gestalt. Al contrario, i gruppi della condizione di "Non ricerca" hanno manifestato in misura maggiore l'utilizzo di una procedura per prove ed errori portando all'aumento di tentativi e da un maggiore sviluppo di percorsi risolutivi inadeguati.

Il compito di cercare i contrari spaziali presenti nella struttura del problema, provocando una maggiore aderenza alla struttura fenomenica del problema, risulta essere formalmente differente rispetto al compito di descrizione fenomenica delle proprietà percettive che definiscono la struttura del problema in seguito al rapporto esistente tra la descrizione verbale e il rendimento percettivo

(Levorato, Massironi, 1991, 1998; Levorato, Massironi & Rigon, 1994). Le descrizioni verbali prodotte dagli osservatori nel momento in cui viene chiesto di utilizzare il linguaggio per descrivere quanto visivamente appare dimostrano in primo luogo che la realtà filtrata per mezzo del linguaggio è una realtà già percettivamente organizzata e strutturata; pertanto le caratteristiche fisiche dello stimolo sotto osservazione, costituente il materiale grezzo della registrazione sensoriale, non vengono trasmesse a livello di descrizione linguistica. Inoltre, l'informazione linguistica che viene prodotta nel momento in cui un osservatore descrive la scena percettiva implica una gerarchia temporale nella nomina di ciò che percettivamente risulta essere rilevante: vengono elencate prima le segregazioni più ampie e globali, come quelle connesse alla distinzione figura-sfondo e forma, e poi via via tutte le altre. Vi sono, tuttavia, alcune proprietà, che identificano aspetti qualificativi dell'oggetto sotto osservazione, ossia riguardanti il com'è l'osservato, che vengono nominati solamente nel momento in cui la situazione richiede di fare distinzioni fra gradi diversi di una stessa caratteristica. Rimangono, però, alcune proprietà qualificative riguardanti l'orientamento, la posizione e le dimensioni, connesse quindi all'esperienza dello spazio, che ad una prima descrizione e/o osservazione non vengono verbalmente esplicitati, nonostante la presenza nella situazione di elementi contrastivi che implicano il riconoscimento di differenze degli oggetti rispetto ad una determinata caratteristica. Questo aspetto risulta quindi essere superato in un compito in cui si chiede ai partecipanti di individuare tutte le proprietà spaziali contrarie insite nel problema. Un altro elemento a favore della richiesta di cercare i contrari spaziali presenti nel problema è costituita dal fatto che la richiesta fornisce già un'indicazione rispetto al modo in cui l'esperienza fenomenica dello spazio si organizza, cioè attorno ad una relazione di contrarietà (Bianchi & Savardi, 2008; Bianchi, Savardi & Kubovy, 2011; Bianchi, Savardi & Burro 2011; Savardi & Bianchi 2009). Tale aspetto potrebbe in un certo senso rimanere implicito e pertanto sottaciuto in un compito di semplice descrizione fenomenica, dato il fatto che nonostante la presenza di elementi contrastivi rispetto ad una determinata proprietà, tali caratteristiche non vengono menzionate linguisticamente (Levorato, Massironi, 1991, 1998; Levorato, Massironi & Rigon, 1994).

La tipologia del processo attivato, considerato in maniera indipendente dalle distinzioni fatte (cfr. Paragrafo 4.2), risulta essere influenzato anche dal tipo di problema da risolvere (Problema”,  $\chi^2(5) = 96.9488$ ;  $p = 0.00$

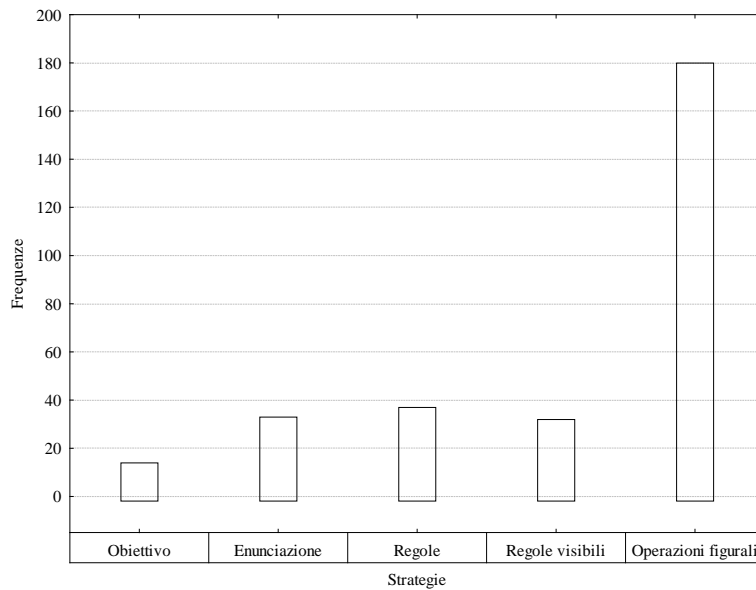


**Figura 35- Il grafico mostra la differenza delle gamme delle frequenze registrate in base al problema presentato.**

Il grafico (cfr. figura 35) mostra una diversa distribuzione delle frequenze nei sei problemi presentati. Tale risultato, così come è stato evidenziato dal tempo di soluzione, dimostra che si tratta di problemi differenti, caratterizzati cioè da un diverso grado di difficoltà. Viene registrato il maggior numero di frequenze per il problema del quadrato; a seguire troviamo il problema della finestra dell’altare, dei nove punti, del parallelogramma, della circonferenza e delle anatre.

Il processo di soluzione risulta essere significativamente diverso anche a seconda delle strategie utilizzate, “Strategie”,  $\chi^2(4) = 511.0651$ ;  $p = 0.00$ .

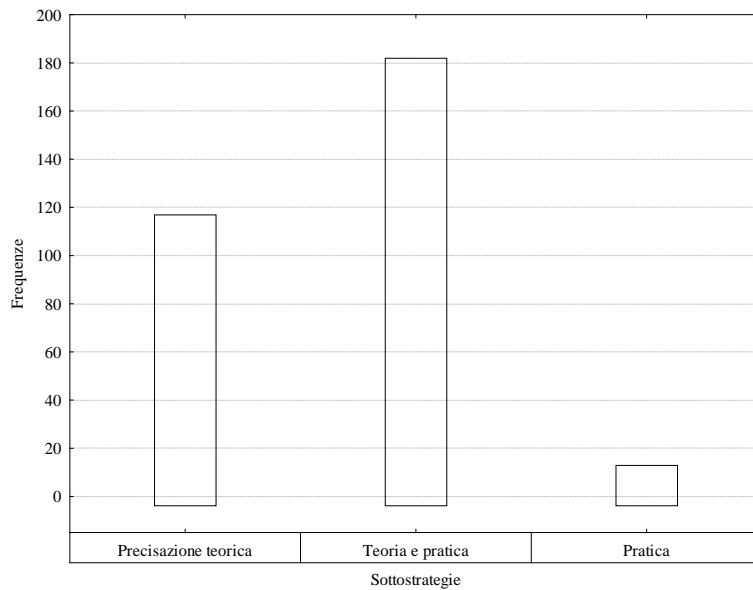




**Figura 36- Il grafico mostra la differenza delle gamme delle frequenze nell'utilizzo delle diverse tipologie di strategie.**

La maggior frequenza di utilizzo si registra in corrispondenza delle operazioni figurali, indicando il fatto che generalmente il processo di soluzione comporta la manipolazione di aspetti percettivo-figurali. Rispetto al numero di volte in cui le altre tipologie di strategie vengono utilizzate, si registra una maggior frequenza di applicazione di regole. Una medesimo numero di frequenze è stato ottenuto rispetto all'utilizzo di strategie basate sull'applicazione di regole visibili e sull'enunciazione di mezzi/ passaggi per raggiungere l'obiettivo. Minori sono le frequenze nell'uso di una strategia basata sull'obiettivo, dato dalla richiesta del problema; tale risultato indica la chiarezza delle domande poste dai problemi.

Significativa, rispetto al processo di soluzione, risulta essere anche l'influenza delle "Sottostrategie",  $\chi^2(2) = 828.3907$ ;  $p = 0.00$ .

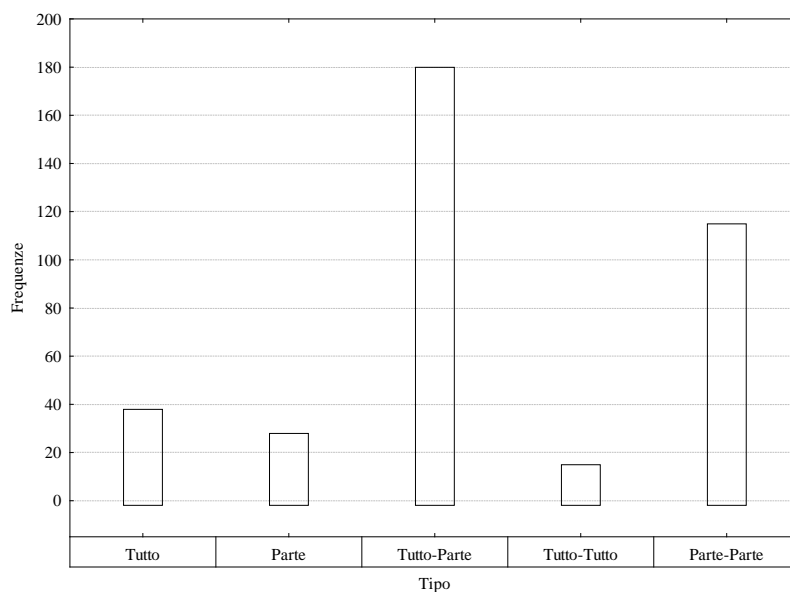


**Figura 37- Il grafico mostra la differenza, in termini di gamme delle frequenze, registrata nell'utilizzo delle diverse sottostrategie.**

Rispetto alle sottostrategie considerate come fattore a sé stante, il grafico mostra un maggior utilizzo delle sottostrategie in cui si coniugano teoria e pratica rispetto all'utilizzo di sottostrategie basate sulla precisazione teorica e sulla pratica. In generale, quindi, i partecipanti applicano sottostrategie in cui vi è sia l'aspetto pratico che l'aspetto teorico, considerato sia come conoscenze nozionistiche apprese in precedenza che come vincoli strutturali riguardanti aspetti figurali connessi alla conformazione geometrica delle figure che costituiscono la situazione problematica. Risulta, invece, essere basso il numero di volte in cui i partecipanti applicano sottostrategie basate sulla pratica senza considerare i vincoli conoscitivi o figurali presenti nel problema. Tra i due estremi (l'elevato numero di applicazioni di sottostrategie basate sugli aspetti teorici e pratici e la bassa frequenza nell'utilizzo di sottostrategie pratiche) si trova la frequenza registrata in corrispondenza dell'applicazione di sottostrategie basate sulla precisazione teorica, cioè sottostrategie aderenti in maniera esclusiva agli aspetti teorici, intesi sia come nozioni che come informazioni verbali e visive che definiscono il problema presentato.

Sulle frequenze registrate, è stata ottenuta un'influenza significativa del fattore "Tipo",  $\chi^2(4) = 285.5272$ ;  $p = 0.00$ , riferita all'ampiezza del campo di applicazione preso in considerazione dai

partecipanti nel momento in cui utilizzano una determinata strategia, cioè se essi prendono in considerazione il problema nella sua interezza (“Tutto”), oppure una parte di esso (“Parte”), o le relazioni tra gli elementi problematici (“Parte- Parte”), o tra il problema, considerato nella sua globalità, e le sue parti (“Tutto- Parte”), o tra il problema, inteso come totalità, e un’ipotetica situazione immaginata (“Tutto- Tutto”).

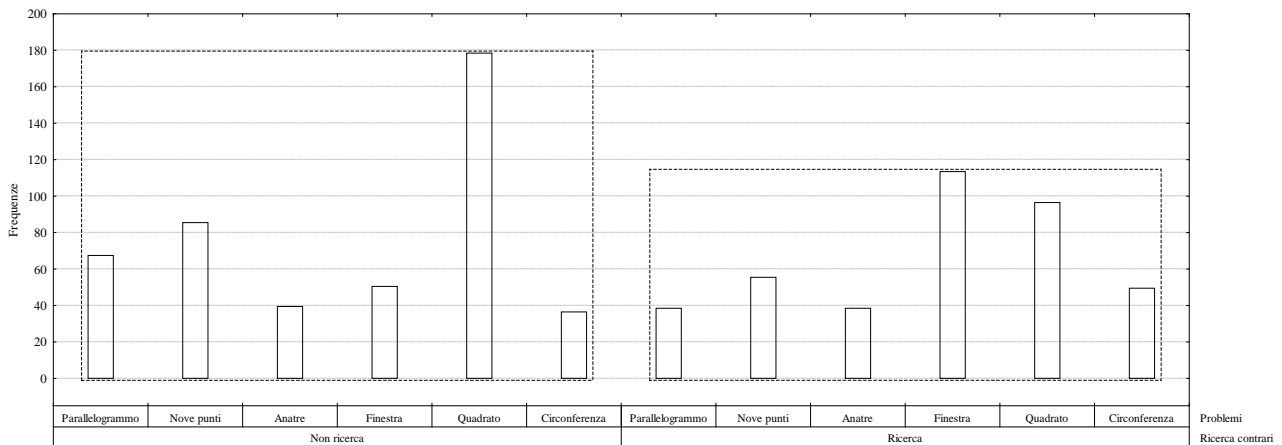


**Figura 38-** Il grafico mostra la diversa distribuzione delle gamme di frequenze rispetto alla variabile “Tipo”, indicante la diversa ampiezza del campo applicativo nell’utilizzo delle strategie risolutive: “Tutto”, riferita ai casi in cui viene considerato il problema nella interezza, la “Parte”, riguardante le situazioni in cui si prende in esame solamente una componente del problema (intesa sia come elemento, quali linee, angoli, che come figura); il “Tutto- Parte”, rappresentante i casi in cui ci si focalizza sulla relazione tra il problema, inteso come globalità, e una sua parte (sia elemento che figura); il “Tutto- Tutto”, riferita alle situazioni in cui ci si concentra sulla relazione tra il problema e un’ipotetica situazione immaginata; la “Parte-Parte”, riguardante i casi in cui si prende in considerazione le relazioni tra gli elementi del problema.

Dal grafico (cfr. figura 38) emerge che la focalizzazione sulle relazioni nell’applicazione di una determinata strategia risolutiva; in particolare si registra un’elevata frequenza per le situazioni in cui l’attenzione è diretta sulla relazione tra il problema e una sua parte che può essere costituita da un elemento, quali linee, angoli, oppure da una figura (“Tutto- Parte”). A seguire troviamo i casi in cui i partecipanti prendono in considerazione la relazione tra due o più parti del problema (“Parte- Parte”) durante il processo risolutivo. È stata ottenuta la frequenza più bassa in corrispondenza della relazione tra la situazione problematica da affrontare e un’ipotetica situazione immaginata (“Tutto- Tutto”). La frequenza è superiore per le situazioni in cui viene considerato il problema, inteso come

totalità (“Tutto”), rispetto ai casi in si prende in esame solamente una parte del problema (“Parte”), concepita sia come elemento che come figura

È stata inoltre evidenziata una significativa interazione tra “Ricerca contrari”\* “Problemi”,  $\chi^2(5) = 20.0758$ ;  $p = 0.00$



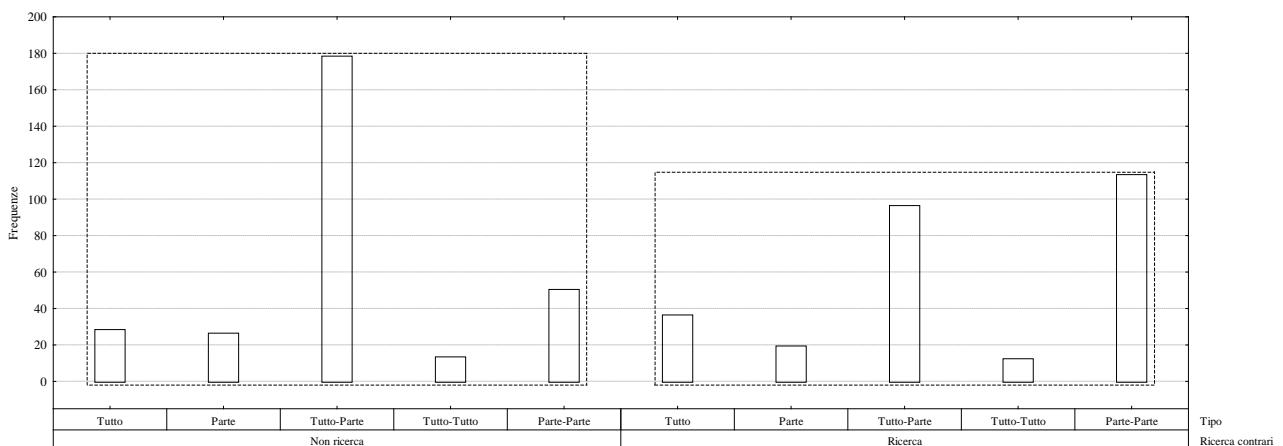
**Figura 39-** Il grafico mostra le differenze in termini di gamme delle frequenze registrate nella condizione di ricerca dei contrari e nella condizione di non ricerca rispetto ai sei problemi presentati: parallelogramma, nove punti, anatre, finestra dell’altare, quadrato, circonferenza.

Il grafico sopra riportato mostra una significativa riduzione delle frequenze registrate, relativamente ai sei problemi presentati, nella condizione “Ricerca”, comprendente i gruppi a cui è stato chiesto di cercare i contrari spaziali presenti nella struttura del problema, rispetto alla condizione di “Non ricerca”, costituita dai gruppi a cui non è stato richiesto di cercare i contrari spaziali presenti nel problema, ma terminata la lettura potevano concentrarsi sulla ricerca della soluzione. Confrontando le due condizioni, “Ricerca” e “Non ricerca”, rispetto ai problemi presentati si ottiene che le frequenze registrate sono maggiori nella seconda situazione (“Non ricerca”) rispetto a tre dei sei problemi presentati: il problema del parallelogramma, dei nove punti e del quadrato; nel problema delle anatre il numero delle frequenze risulta essere uguale nelle due condizioni; nel problema della finestra dell’altare e nel problema della circonferenza il numero delle frequenze è maggiore nella condizione di “Ricerca”. All’interno, poi, di ciascuna condizione, il numero delle frequenze registrate varia in funzione del tipo di problema affrontato: si è registrato un maggior numero di

frequenze per il problema del quadrato nella condizione della “Non ricerca”; mentre nella condizione della “Ricerca” il maggior di frequenze è stato ottenuto nel problema del quadrato.

La differenza riscontrata nelle frequenze ottenute, indici di una maggiore o minore aderenza alla struttura problemica, rispetto alla tipologia del problema presentato, può suggerire in questo caso che la ricerca dei contrari non sempre ha portato all’elicitazione di dimensioni rilevanti per la soluzione, pur essendo salienti nella struttura problemica. Quest’ultima, infatti, molto spesso può essere costituita da una configurazione visiva pregnante, intesa, in accordo con il primo significato che Wertheimer ha attribuito al termine pregnanza (Wertheimer, 1912a, 1912b, 1923), come forma percettiva stabile, singolare, regolare, caratterizzata cioè dal massimo equilibrio tra i fattori organizzativi (Kanizsa, 1991, Kanizsa, Luccio 1989; Pinna 2005). Una simile configurazione può di fatto costituire un ostacolo per il processo di soluzione (Kanizsa, 1975), impedendo cioè la scoperta di nuove possibili relazioni indicanti percorsi risolutivi alternativi. Di conseguenza, la fase di ricerca dei contrari potrebbe essere stata in qualche modo condizionata da alcune proprietà percettive emergenti, salienti per la struttura fenomenica del problema impedendo la scoperta e il riconoscimento di dimensioni contrarie rilevanti per la soluzione del problema.

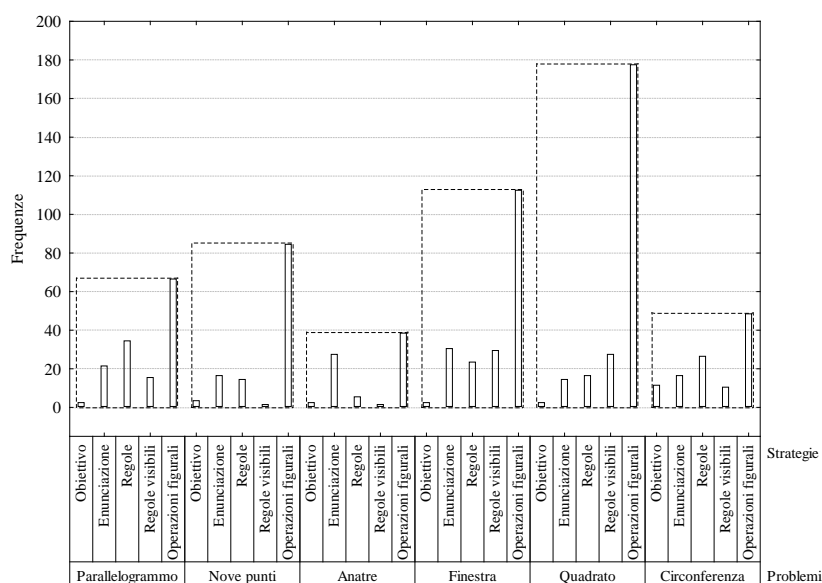
è stata ottenuta un’interazione significativa tra questo fattore e il fattore “Ricerca contrari” (“Ricerca contrari” \* “Tipo”,  $\chi^2(4) = 27.9683$ ;  $p = 0.00$ ).



**Figura 40-** Il grafico rappresenta le differenze, in termini di gamme delle frequenze, nella condizione di ricerca dei contrari ("Ricerca") e in quella di non ricerca dei contrari "Non ricerca" rispetto alla diversa ampiezza del campo di applicazione preso in esame durante l'utilizzo di una determinata strategia ("Tipo").

Il grafico anche in questo caso come nelle situazioni precedenti indica una significativa riduzione delle frequenze registrate nella condizione “Ricerca” rispetto alla condizione “Non ricerca”. Nella condizione di “Non ricerca” si è registrato un maggior numero di frequenze per la relazione “Tutto-Parte”, (risultanti superiori anche all’interno della condizione stessa) rispetto alle frequenze ottenute nella condizione di “Ricerca”. Al contrario, si ottiene un maggior numero di volte in cui i partecipanti si sono focalizzati sulla relazione “Parte- Parte” (superiore anche all’interno della stessa condizione) nella condizione di “Ricerca” rispetto alla condizione di “Non ricerca”. Superiore è, inoltre, il numero di volte in cui i partecipanti, nella condizione di “Ricerca”, considerano il problema nella sua interezza (“Tutto”) rispetto ai partecipanti appartenenti alla condizione di “Non ricerca”. Viceversa, vi è una maggiore frequenza di situazioni in cui gruppi della condizione “Non Ricerca” si concentrano su una parte del problema (“Parte”) rispetto ai gruppi della condizione di “Ricerca”. È stata registrata, in entrambe le condizioni, un’uguale frequenza del numero di volte in cui i partecipanti confrontano il problema che stanno affrontando con una situazione problematica immaginata (“Tutto- Tutto”).

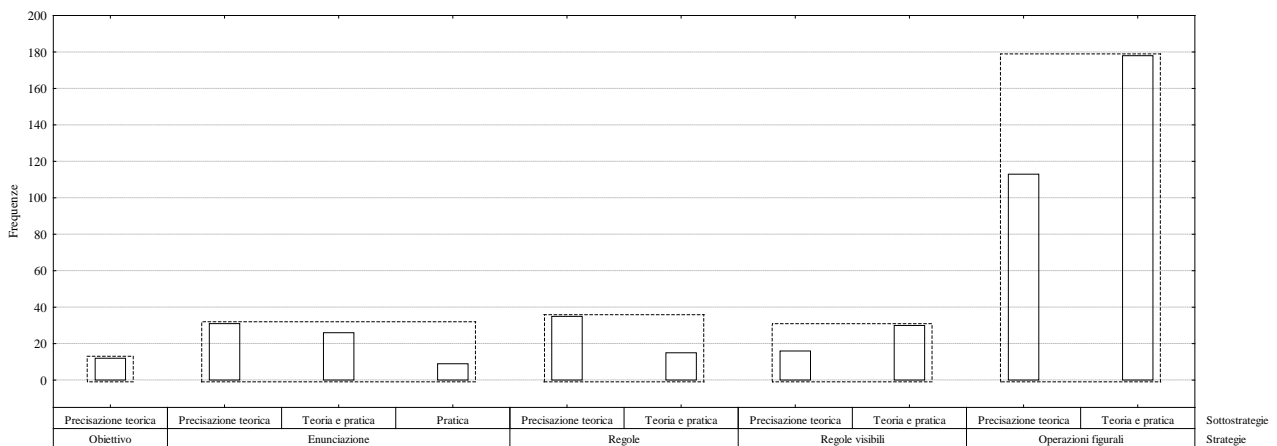
I dati ottenuti indicano inoltre una diversa frequenza nell’utilizzo delle varie tipologie di strategie a seconda del problema da risolvere (“Problemi”\* “Strategie”,  $\chi^2(20) = 64.0546$ ;  $p = 0.00$ ).



**Figura 41- Il grafico mostra le differenze, in termini di gamme delle frequenze, nell'utilizzo delle diverse strategie (obiettivo, enunciazione di mezzi e passaggi per raggiungere l'obiettivo, applicazione di regole, applicazione di regole visibili, applicazione di descrizioni/ operazioni figurali) nei sei problemi presentati.**

Vengono applicate in misura maggiore per tutti i problemi le strategie visive, rappresentate dalle operazioni figurali. Questo risultato indica che i problemi presentati sono problemi ad alto contenuto percettivo, in cui gli aspetti fenomenico- percettivi risultano essere centrali. Tuttavia, il maggior utilizzo di strategie visive lo si registra in corrispondenza del problema del quadrato; a seguire quello della finestra dell'altare, dei nove punti, del parallelogramma, della circonferenza e delle anatre. Rispetto all'utilizzo delle altre tipologie di strategie, si registra una minor variabilità nella distribuzione. Vi è un'applicazione maggiore delle regole nella soluzione del problema del parallelogramma, della circonferenza e della finestra dell'altare; d'altra parte si tratta di problemi per i quali è ammessa sia una soluzione percettiva che nozionistica. L'utilizzo maggiore della strategia basata sull'enunciazione di mezzi/ passaggi per raggiungere l'obiettivo avviene in corrispondenza del problema delle anatre e della finestra dell'altare; mentre la superiorità dell'applicazione di regole visibili viene registrata nella soluzione del problema della finestra dell'altare e in quella del problema del quadrato. La minima variabilità di frequenze registrate nella strategia rappresentata dall'obiettivo deriva dalla diversità di richieste poste da ciascun problema.

Si registra, inoltre, una significativa differenza nell'utilizzo delle strategie associate alle diverse sottostrategie comprese al loro interno ("Strategie" \* "Sottostrategie,  $\chi^2(8) = 211.4546$ ;  $p = 0.00$ ).



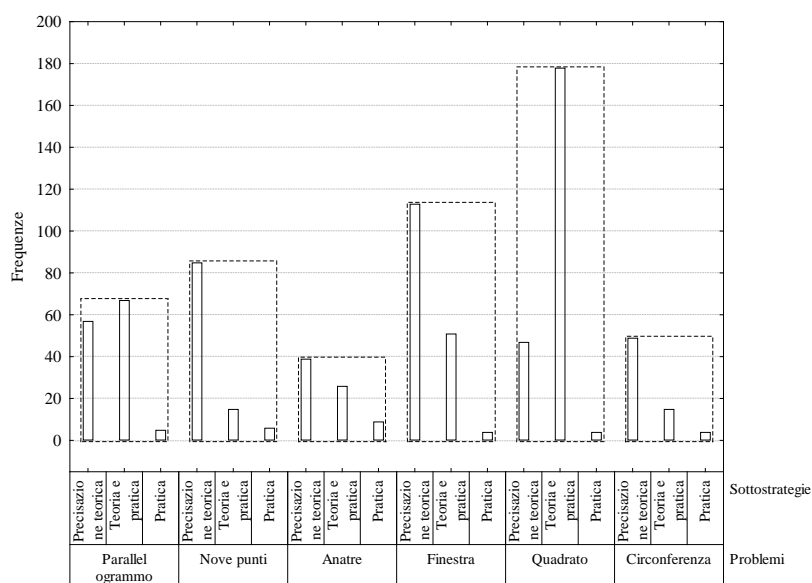
**Figura 42- Il grafico mostra la differenza, in termini di gamme delle frequenze, nell'utilizzo delle sottostrategie (precisione teorica, teoria e pratica, pratica) nell'applicazione di ciascuna strategia.**

Ciascuna strategia, come già esposto nella presentazione delle variabili (cfr. paragrafo 4.2), si compone al suo interno di diverse sottostrategie che, pur possedendo dei tratti che li accomunano, assumono un diverso significato a seconda del tipo di strategia alla quale sono associate. Il grafico sopra presentato (cfr. figura 42) mostra una maggiore frequenza nell'utilizzo di strategie basate su operazioni figurali; in particolare vengono utilizzate maggiori operazioni visive in cui vengono associate la teoria e la pratica rispetto a quelle legate ad una precisazione teorica. Questo significa che le strategie visive maggiormente utilizzate sono costituite, in larga parte da trasformazioni figurali aderenti alle forme geometriche presentate in quanto da esse suggerite; mentre vengono utilizzate in misure minore le strategie figurali basate su una stretta aderenza a quanto visivamente viene presentato, cioè è minore l'utilizzo di descrizioni del materiale raffigurato. La situazione contraria si verifica nel momento in cui si applicano regole, la cui frequenza è maggiore rispetto alle altre strategie. In questo caso vi è maggior utilizzo di regole basate su una precisazione teorica rispetto a regole basate su teoria e pratica; questo significa che vengono maggiormente applicate nozioni o formule matematiche imposte da definizioni matematico-geometriche precedentemente acquisite e riguardanti le figure geometriche coinvolte nel problema rispetto ad autoistruzioni



derivanti da vincoli percettivo figurali precedentemente appresi che i partecipanti si auto-impongono nel momento in cui devono risolvere il problema che viene loro presentato. Per quanto riguarda l'applicazione di regole visibili, si registra una maggior frequenza di strategie associate a teoria e pratica (sottostrategia "Teoria e pratica"), basate cioè su ciò che al tempo stesso viene colto percettivamente ma che deriva da quanto viene appreso durante il processo di soluzione mediante la rilettura del testo del problema o l'utilizzo di un righello, rispetto all'uso di strategie basate su quanto al tempo stesso è visibile e derivante da conoscenze teoriche apprese in precedenza (sottostrategia "Precisazione teorica"). Per quanto riguarda l'enunciazione di mezzi/ passaggi per raggiungere l'obiettivo, si registra un maggior utilizzo di strategie associate alla precisazione teorica, consistenti cioè nella ricerca, dal punto di vista teorico, di informazioni utili al fine di raggiungere l'obiettivo, rispetto all'applicazione di strategie basate su teoria e pratica, rappresentate da riletture del testo del problema nella sua interezza o di alcune sue parti, e di strategie basate sulla pratica, costituite da una riformulazione, utilizzando espressioni proprie, del testo del problema o dell'obiettivo posto dalla situazione problemica. Infine per quanto riguarda l'obiettivo, l'unica sottostrategia associata è la precisazione teorica, in quanto l'obiettivo viene posto dal problema stesso.

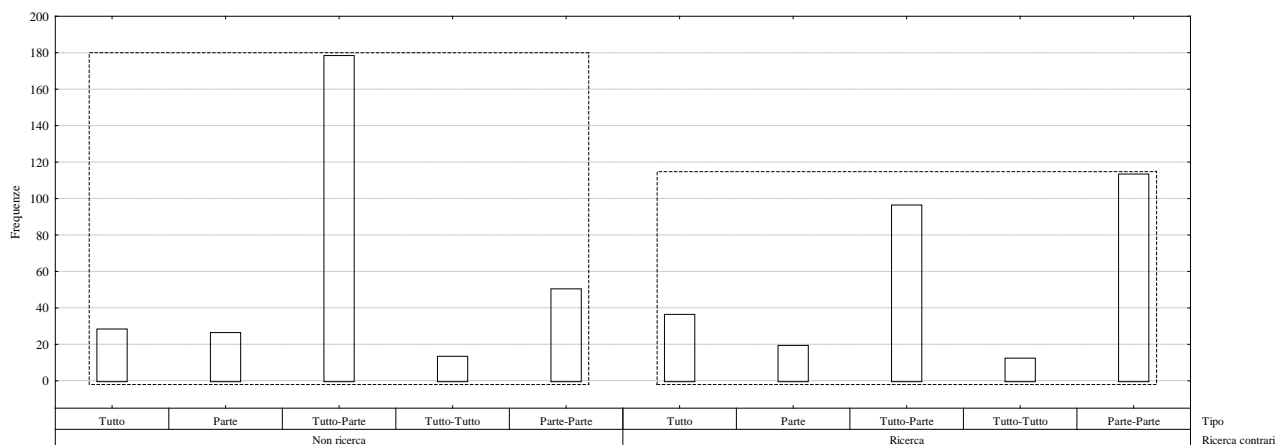
Le sottostrategie risultano essere significativamente associate ai problemi ("Sottostrategie" \* "Problemi",  $\chi^2(10) = 47.2568$ ;  $p = 0.00$ )



**Figura 43- Il grafico mostra una differente distribuzione delle sottostrategie (precisazione teorica, teoria e pratica e pratica) utilizzate nella soluzione di ciascuno dei sei problemi presentati.**

Il grafico riguardante l'applicazione delle sottostrategie nella soluzione dei problemi presentati (cfr. figura 43), conferma il minor utilizzo di sottostrategie pratiche nella soluzione di tutti i problemi presentati. Questo risultato indica che nella soluzione di problemi di questo tipo è difficile prescindere da vincoli conoscitivi o strutturali- figurativi a cui in qualche modo e in una certa misura i partecipanti rimangono ancorati. Per risolvere il problema del parallelogrammo e del quadrato vengono utilizzate maggiormente sottostrategie in cui si coniugano teoria e pratica rispetto all'uso di sottostrategie basate sulla precisazione teorica. Al contrario, durante la soluzione del problema dei nove punti, delle anatre, della finestra dell'altare e della circonferenza i partecipanti applicano in misura maggiore sottostrategie basate sulla precisazione teorica rispetto a sottostrategie in cui esiste un connubio tra aspetti teorici e pratici.

Si è ottenuta una significativa interazione tra il fattore "Problema" e il fattore "Tipo"; "Problema" \* "Tipo",  $\chi^2(20) = 330.0405$ ;  $p = 0.00$ .

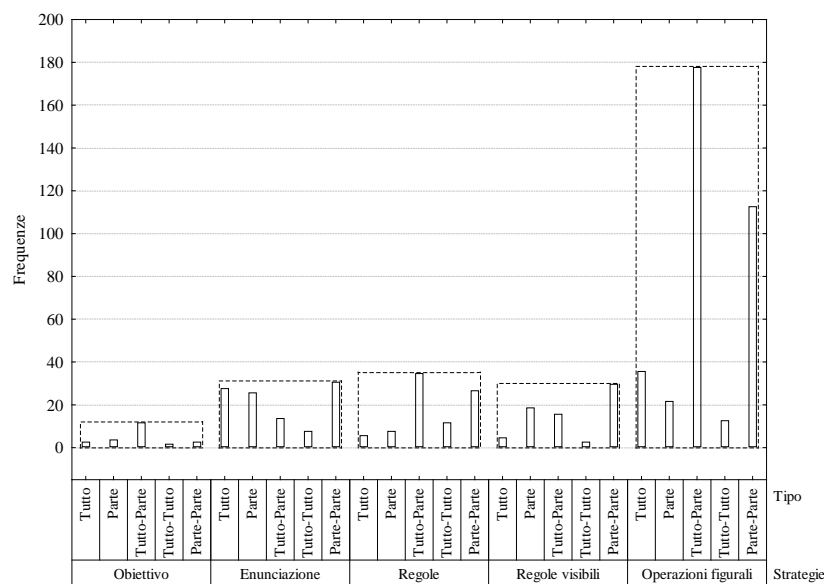


**Figura 44-** Il grafico mostra le gamme delle frequenze rispetto all'ampiezza del campo di applicazione preso in considerazione ("Tipo") durante la soluzione di ciascun problema presentato.

Il grafico mostra una significativa differenza nelle frequenze registrate rispetto all'ampiezza del range di applicazione coinvolto durante il processo di soluzione di ciascun problema. Questo risultato conferma la differenza tra i problemi presentati e quindi l'utilizzo di diverse strategie risolutive basate su una maggiore o minore ampiezza del campo di applicazione coinvolto nel processo di soluzione. La frequenza più alta è stata registrata in corrispondenza della relazione "Tutto- Parte" durante la soluzione del problema del quadrato. I partecipanti si focalizzano in prevalenza su questa relazione anche nel risolvere il problema del parallelogrammo e dei nove punti. Mentre il processo risolutivo utilizzato dai partecipanti per risolvere il problema della finestra dell'altare, della circonferenza e delle anatre si focalizza essenzialmente sulla relazione tra due o più elementi problematici ("Parte- Parte"). In corrispondenza del problema delle anatre, si registra un maggior numero di situazioni, rispetto agli altri problemi, in cui i partecipanti prendono in considerazione il problema nella sua interezza ("Tutto"). Il problema del parallelogrammo, invece, rispetto agli altri problemi, presenta un maggior numero di casi in cui i gruppi confrontano l'attuale situazione problematica con una situazione immaginata ("Tutto- Tutto"). Mentre il processo di soluzione nel problema della finestra dell'altare presenta una maggiore frequenza, rispetto agli altri problemi, di casi in cui i gruppi considerano solamente una parte del problema, che può essere un elemento, come le linee, o una figura ("Parte").

Si sono infine ottenute interazioni significative tra il fattore “Tipo” e il fattore “Strategia”; “Strategia” \* “Tipo”,  $\chi^2(8) = 211.4546$ ;  $p = 0.00$ ; e tra il “Tipo” e le “Sottostrategie”; “Sottostrategie” \* “Tipo”,  $\chi^2(5) = 56.0573$ ;  $p = 0.00$ .

Rispetto alla prima interazione, si registra una differenza nella distribuzione delle frequenze della diversa ampiezza del range applicativo preso in esame durante il processo di soluzione associata alla tipologia di strategie adottate.

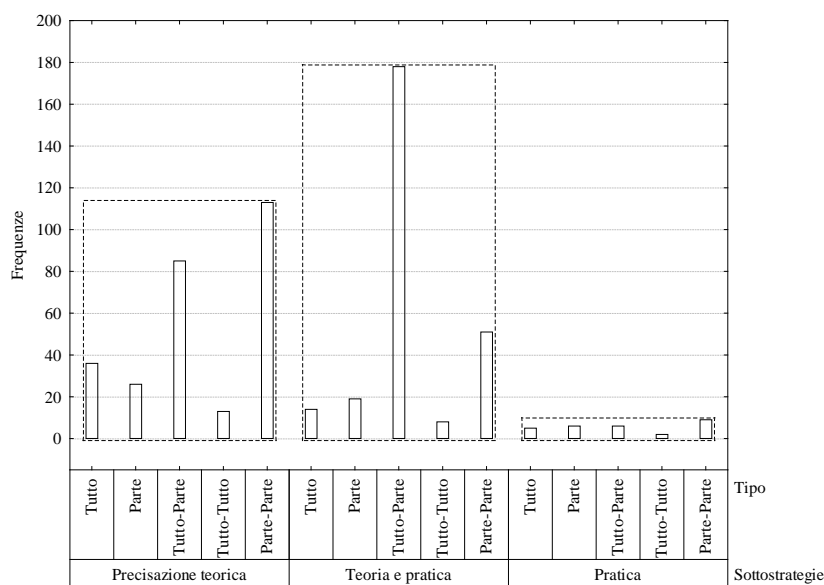


**Figura 45- Il grafico mostra la diversità delle gamme delle frequenze associate all'ampiezza del campo di applicazione coinvolto nel processo risolutivo, legata ad una determinata strategia.**

La maggior frequenza è stata registrata in corrispondenza delle operazioni figurali rispetto alla relazione tutto- parte, indice del fatto che quando i partecipanti utilizzano una strategia visiva generalmente prendono in esame le relazioni esistente tra il problema e le parti di cui esso si compone. Superiore, rispetto alle altre strategie, è il numero di volte in cui i partecipanti nel momento in cui adottano una strategia basata sulla manipolazione di aspetti figurali considerano anche la relazione che intercorre tra due o più parti del problema. Nell'applicazione di regole visibili i partecipanti si focalizzano in prevalenza sulle relazioni “Parte- Parte” e “Tutto- parte” e sulle singole parti problematiche. Nell'adottare una strategia basata sull'applicazione di regole, i partecipanti si concentrano sulle relazioni “Tutto- Parte”, “Parte- Parte” e “Tutto- Tutto”, inteso

come confronto tra il problema presentato un'ipotetica situazione immaginata. Nelle strategie basate sull'enunciazione di mezzi e passaggi per raggiungere l'obiettivo si riscontrano frequenze maggiori rispetto alla relazione "Parte- Parte", al "Tutto" e alla "Parte". Infine centrale nell'obiettivo è il focus sulla relazione "Tutto- Parte". I risultati ottenuti denotano il carattere relazione delle strategie utilizzate nella soluzione dei problemi presentati, in quanto nell'applicazione delle varie strategie si registra il coinvolgimento di relazioni tra il problema e le sue parti ("Tutto- Parte"), tra due o più parti del problema ("Parte- Parte" e, in misura minore, tra il problema e una situazione ipotetica ("Tutto- Tutto").

Il carattere relazionale viene delle strategie viene anche confermato dal legame tra le sottostrategie e la diversa ampiezza del campo di applicazione considerato nella soluzione dei problemi (cfr. figura 46).



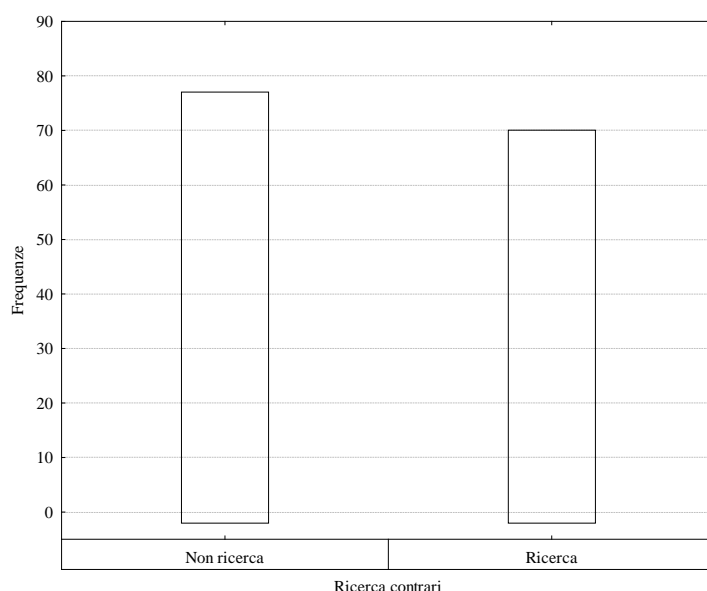
**Figura 46- Il grafico mostra la differenza, in termini di gamme delle frequenze, registrata nelle diverse sottostrategie rispetto all'ampiezza del campo di applicazione ("Tipo").**

Centrale anche nel momento in cui si applicano le sottostrategie è il focus sulle relazioni tra il problema e le sue parti ("Tutto- Parte"), dove è stata registrata una maggior frequenza in corrispondenza delle sottostrategie in cui vi è un connubio tra la teoria e la pratica, o tra due o più componenti problematiche ("Parte- Parte"), la cui maggior frequenza è stata riscontrata

nell'applicazione di sottostrategie basate sulla precisazione teorica. Nell'adottare questa sottostrategia i partecipanti prendono in considerazione anche il problema nella sua interezza ("Tutto") o una sua parte. Nell'applicazione delle sottostrategie è meno frequente il confronto tra il problema presentato e un'ipotetica situazione ("Tutto- Tutto").

*Gesti.* Un'altra variabile presa in considerazione è la tipologia dei gesti prodotti e le frequenze rispetto al numero di volte in cui questi si sono manifestati nel comportamento dei partecipanti (cfr. paragrafo 4.2).

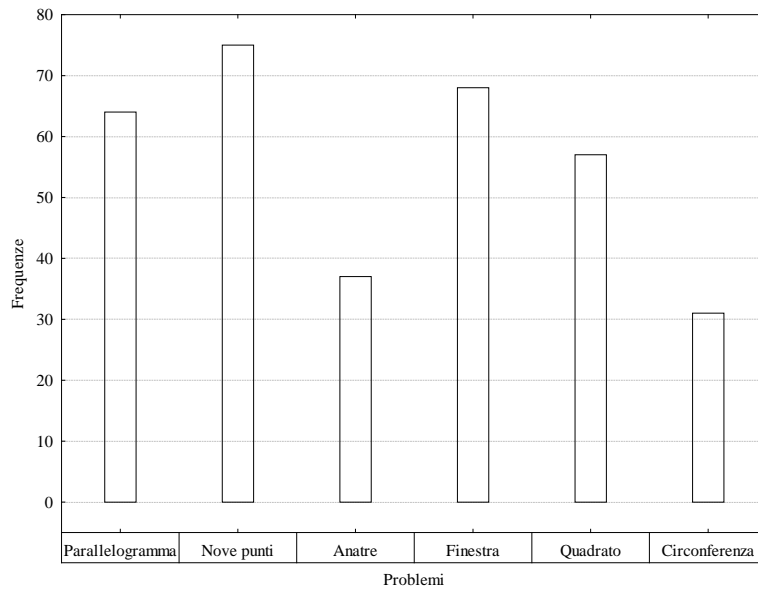
La "Ricerca contrari" influenza in maniera significativa le frequenze registrate rispetto a questa variabile,  $\chi^2(1) = 49.9967$ ;  $p = 0.00$ .



**Figura 47-** Il grafico mostra la differenza delle gamme delle frequenze relative ai gesti prodotti nelle due condizioni "Ricerca" e "Non ricerca".

I gruppi appartenenti alla condizione di "Ricerca" producono un numero di gesti inferiore rispetto ai gruppi della condizione "Non ricerca".

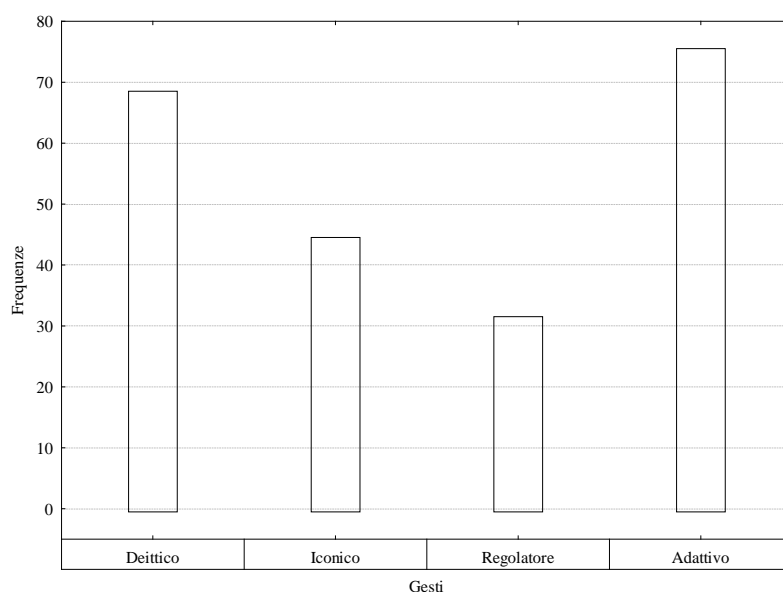
La frequenza di produzione dei gesti è significativamente influenzata anche dal tipo di problemi che i partecipanti si trovano a risolvere ("Problemi",  $\chi^2(5) = 33.1706$ ;  $p = 0.00$ ).



**Figura 48- Il grafico mostra una differente distribuzione delle gamme di frequenza di produzione dei gesti rispetto ai problemi presentati.**

Dal grafico emerge che i partecipanti elicitarono un maggior numero di gesti durante il processo di soluzione del problema dei nove punti; al contrario la minor frequenza viene registrata in corrispondenza del problema della circonferenza. Tra questi due estremi si collocano le frequenze, in ordine decrescente, registrate durante il processo di soluzione dei seguenti problemi: la finestra dell'altare, il parallelogramma, il quadrato, la circonferenza ed infine il problema delle anatre.

Le frequenze sono significativamente differenti rispetto alla tipologia dei gesti prodotti, "Gesti",  $\chi^2(3) = 144.3711$ ;  $p = 0.00$ .



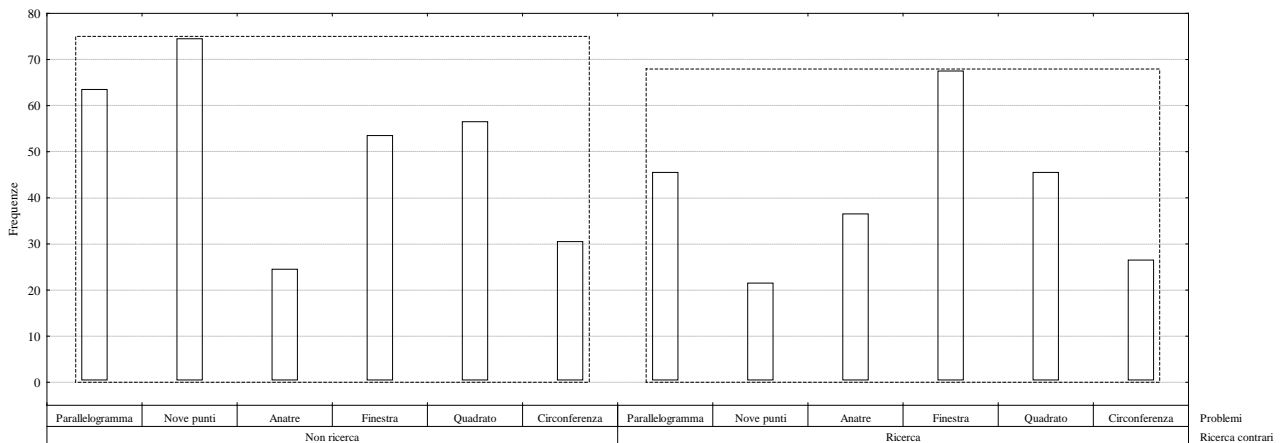
**Figura 49- il grafico mostra una differente distribuzione delle gamme delle frequenze in relazione alla tipologia di gesti prodotti: deittico, iconico, regolatore, adattivo.**

Dal grafico emerge una diversa distribuzione delle frequenze registrate durante il processo di soluzione a seconda della tipologia dei gesti prodotti (Edwards, 2009; Radford, Edwards, & Arzarello, 2009; Francaviglia, Servidio, 2011). In generale i partecipanti, mentre sono impegnati nella soluzione di problemi, manifestano una quantità maggiore di gesti adattivi, di gesti cioè che vengono espressi non intenzionalmente e non a scopi comunicativi ma al fine di regolare gli stati emotivi interni. Risulta essere frequente anche la produzione di gesti deittici, il cui scopo è quello di orientare l'attenzione dell'interlocutore verso una determinata area del foglio. In questo caso, un elevato numero di gesti deittici è ritenuto plausibile in quanto si tratta di problemi costituiti da figure geometriche, per cui è naturale che i partecipanti durante la ricerca della soluzione si riferiscono agli elementi problematici indicandoli in modo da convogliare l'attenzione degli altri componenti del gruppo verso l'aspetto, oggetto di discussione e di confronto. Troviamo infine i gesti iconici, ossia i gesti utilizzati per rappresentare attraverso il comportamento quanto viene espresso verbalmente, e i gesti regolatori, avente la funzione di regolare il flusso comunicativo tra i partecipanti. Il minor utilizzo di questo tipo di gesti è dato dal fatto che i problemi presentati



contengono molto spesso figure o richiedono la produzione di disegni, schizzi durante il processo di soluzione; pertanto di solito ciò di cui si sta parlando risulta essere visivamente presente.

La diversa distribuzione del numero di manifestazioni dei gesti è inoltre influenzata dalla significativa interazione tra la “Ricerca contrari” e i “Problemi” (“Ricerca contrari” \* “Problemi”,  $\chi^2(5) = 13.4576$ ;  $p = 0.01$ ).

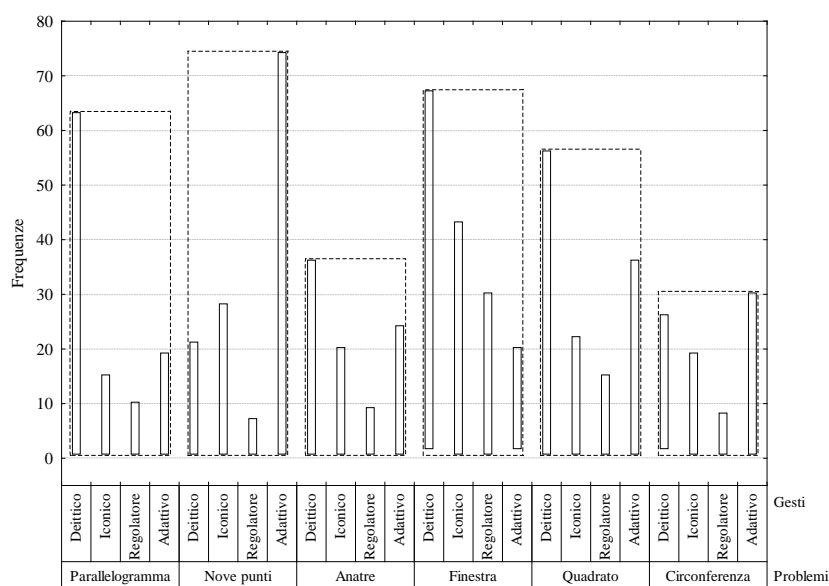


**Figura 50- Il grafico mostra una differente distribuzione dei gesti nelle due condizioni rispetto a ciascun problema presentato.**

Anche in questo caso le frequenze registrate sono minori nella condizione di “Ricerca” rispetto alla condizione di “Non ricerca”. In quest’ultima condizione i partecipanti manifestano più gesti durante la soluzione del problema dei nove punti, del parallelogramma, del quadrato e della circonferenza rispetto alla condizione di “Ricerca”. Al contrario, si verifica una maggior produzione di gesti nella condizione di “Ricerca” rispetto alla “Non ricerca” durante la soluzione del problema della finestra dell’altare e delle anatre. Concentrando l’attenzione all’interno della condizione di “Ricerca” i partecipanti manifestano un maggior numero di gesti durante il processo di soluzione del problema della finestra dell’altare; a seguire troviamo il problema del quadrato, il cui valore è uguale alle frequenze registrate durante il processo di soluzione del problema del parallelogramma. Dopo questi due problemi, si trovano le frequenze registrate in corrispondenza del problema delle anatre; successivamente quelle del problema della circonferenza. Il minor numero di frequenze all’interno della condizione di “Ricerca” è stato ottenuto in coincidenza del problema dei nove punti. Per

quanto riguarda la condizione di “Non ricerca” l’ordine di produzione di un maggior numero di gesti è diverso: i partecipanti, infatti, manifestano più gesti durante la soluzione del problema dei nove punti, seguito dal problema del parallelogramma, da quello del quadrato, dal problema della finestra dell’altare, dal problema della circonferenza ed infine da quello delle anatre.

La diversa distribuzione della frequenza di produzione dei diversi tipi di gesti è influenzata anche dal tipo di problema che i partecipanti si trovano a dover risolvere (“Problemi” \* “Gesti”,  $\chi^2(15)=66.1556$ ;  $p = 0.00$ ).



**Figura 51-** Il grafico mostra una differente distribuzione, in termini di gamme delle frequenze, dei diversi tipi di gesti prodotti durante il processo di soluzione di ciascun problema presentato.

Il grafico (cfr. figura 51) mostra che i problemi si differenziano in quanto favoriscono la produzione di quantità diverse delle varie tipologie di gesti. I gruppi producono in misura maggiore gesti deittici nel momento in cui risolvono il problema della finestra dell’altare, del parallelogramma, del quadrato, delle anatre e della circonferenza. I gesti iconici sono manifestati maggiormente durante la soluzione del problema della finestra dell’altare, dei nove punti, del quadrato, delle anatre e della circonferenza. In alcuni dei problemi elencati (il problema della finestra dell’altare, delle anatre, del quadrato e della circonferenza) la produzione di tale tipologia di gesti è inferiore rispetto al numero di volte in cui i partecipanti manifestano gesti deittici. La frequenza dei gesti adattivi è superiore nel

processo di soluzione del problema dei nove punti, del quadrato e della circonferenza. Per quanto riguarda, infine, i gesti regolatori, la loro produzione è maggiore nel problema del quadrato rispetto alle frequenze registrate in corrispondenza degli altri problemi.

Sono state infine esaminate le tipologie delle soluzioni (cfr. paragrafo 4.2) che i gruppi hanno dato ai problemi presentati. Esse sono state distinte in cinque categorie: nessuna soluzione, riferita alle situazioni in cui i partecipanti non hanno risolto il problema; soluzioni corrette percettive, cioè soluzioni giuste basate su trasformazioni percettive delle proprietà fenomeniche dello spazio, quali il capovolgimento di figure, la scomposizione di figure, ecc.; soluzioni corrette nozionistiche, ossia soluzioni giuste basate, in questo caso, sull'applicazione di formule matematico-geometriche; soluzioni non corrette percettive, cioè soluzioni sbagliate basate su trasformazioni fenomenico-percettive dello spazio; e soluzioni non corrette nozionistiche, ossia soluzioni sbagliate basate sull'applicazione di nozioni.

*Tipologia delle soluzioni.* Sono state prese confrontate le due tipologie di soluzioni corrette, quelle percettive e quelle nozionistiche in base alle percentuali di risposta registrate. Su di esse è stata applicata un'ANOVA a una via<sup>1</sup>, prendendo in considerazione i due fattori, "Ricerca contrari" e "Suggerimento" in base ai quali è possibile distinguere le condizioni sperimentali. Confrontando le percentuali di soluzioni corrette percettive per i sei problemi presentati, il fattore "Ricerca contrari" influenza significativamente la produzione di questa tipologia di soluzioni,  $F(1, 76) = 13.370$ ,  $p = .000$

---

<sup>1</sup> L'utilizzo dell'ANOVA sulle percentuali è stato fatto nonostante la consapevolezza del dibattito esistente tra la congruità o meno di questa analisi sulle percentuali; tuttavia molti ricercatori la utilizzano.

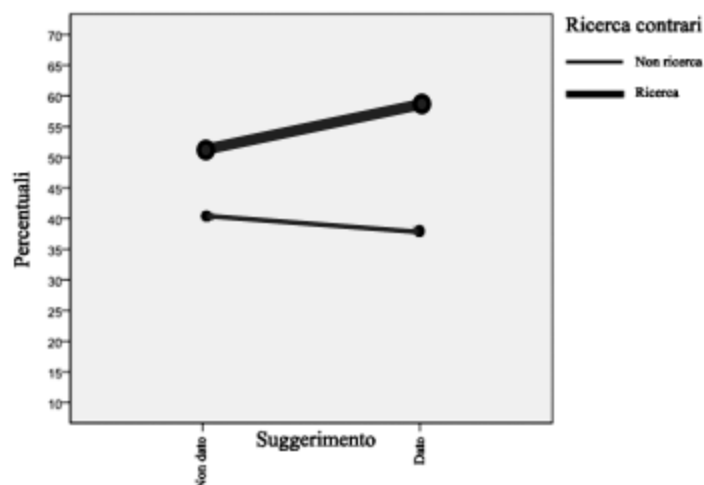


Figura 52- Il grafico mostra le percentuali delle soluzioni corrette percettive rispetto ai due fattori “Ricerca contrari” e “Suggerimento” per i sei problemi presentati.

Dal grafico emerge che i gruppi a cui è stato chiesto di cercare i contrari producono un maggior numero di soluzioni corrette percettive rispetto ai gruppi appartenenti alla condizione di “Non ricerca”. Successivamente, sempre attraverso l’ANOVA a una via, prendendo in considerazione i due fattori, “Ricerca contrari” e “Suggerimento” sono state considerate le percentuali delle soluzioni corrette nozionistiche che i gruppi hanno dato ai sei problemi presentati. Anche in questo caso è stato trovato un effetto significativo del fattore “Ricerca contrari”, ”:  $F(1, 76)= 10.085$ ,  $p=.002$ .

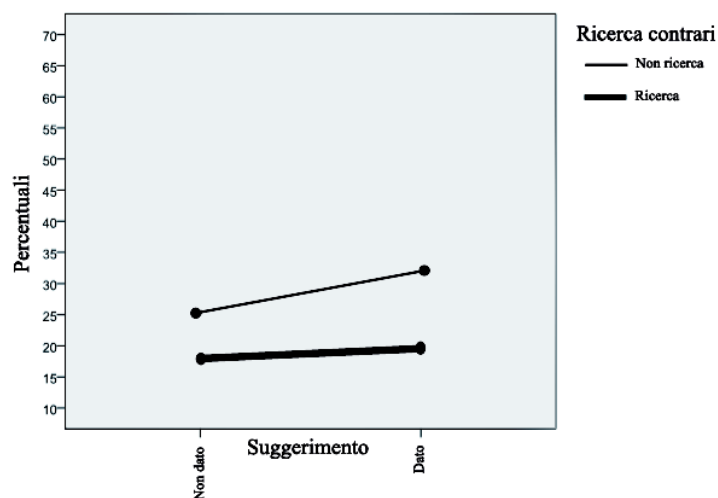
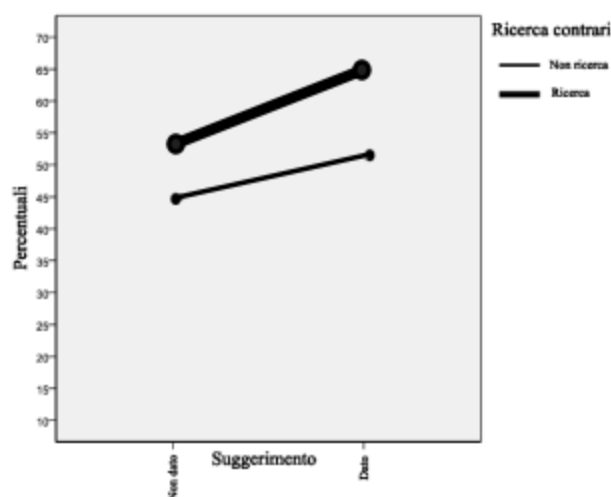


Figura 53- Il grafico mostra le percentuali delle soluzioni corrette nozionistiche rispetto ai due fattori “Ricerca contrari” e “Suggerimento” per i sei problemi presentati.

In questo caso il numero delle soluzioni nozionistiche fornite dai gruppi appartenenti alla condizione di “Ricerca” risulta essere ridotto rispetto ai gruppi appartenenti alla condizione di “Non ricerca”. Al contrario, i partecipanti di questa ultima condizione producono un maggior numero di soluzioni nozionistiche.

Dal momento che i problemi utilizzati possono essere distinti in due gruppi, problemi percettivi, per i quali è ammessa solamente la soluzione corretta percettiva (il problema dei nove punti, delle anatre, del quadrato) e problemi aventi una duplice soluzione, per i quali è possibile fornire sia una soluzione corretta percettiva che una soluzione nozionistica (il problema del parallelogramma, della finestra dell’altare e della circonferenza) sono state analizzate, mediante un’ANOVA a una via, prendendo in considerazione i due fattori “Ricerca contrari” e “Suggerimento” le percentuali delle soluzioni corrette percettive che i gruppi hanno fornito ai tre problemi percettivi. Anche in questo caso il fattore “Ricerca contrari” è risultato significativo,  $F(1, 76) = 3.941, p = .051$ .

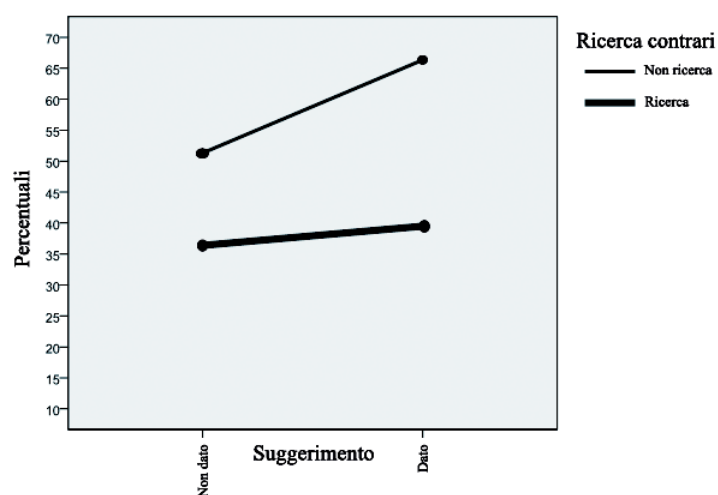


**Figura 54-** Il grafico mostra le percentuali delle soluzioni corrette percettive rispetto ai due fattori “Ricerca contrari” e “Suggerimento” per i tre problemi percettivi.

Dal grafico risulta che i gruppi a cui è stato chiesto di cercare i contrari spaziali prima di risolvere il problema producono anche in questo caso un maggior numero di soluzioni corrette percettive nei tre problemi percettivi. Al contrario, i gruppi appartenenti alla condizione di “Non ricerca” forniscono

un numero inferiore di soluzioni corrette percettive nei problemi per i quali è ammessa solamente la soluzione percettiva.

Sono state infine analizzate, mediante l'ANOVA a una via e rispetto ai due fattori "Ricerca contrari" e "Suggerimento", le percentuali delle soluzioni corrette nozionistiche prodotte dai gruppi nei tre problemi per i quali è possibile sia la soluzione percettiva che la soluzione nozionistica. Anche in questo caso il fattore "Ricerca contrari" è risultato significativo,  $F(1, 76) = 10.677$ ,  $p = .002$ .



**Figura 55-** Il grafico mostra le percentuali delle soluzioni corrette nozionistiche rispetto ai due fattori "Ricerca contrari" e "Suggerimento" per i tre problemi avente duplice soluzione.

Dal grafico emerge che le soluzioni nozionistiche che i gruppi appartenenti alla condizione di "Non ricerca" forniscono ai tre problemi aventi duplice soluzione sono maggiori rispetto alle soluzioni nozionistiche date dai gruppi della condizione di "Ricerca". Al contrario, i partecipanti a cui è stato chiesto di cercare i contrari spaziali prima di risolvere il problema producono un minor numero di soluzioni nozionistiche nei tre problemi per i quali è ammessa sia la soluzione nozionistica che la soluzione percettiva.

## 4.4 Conclusioni

La ricerca presentata si è focalizzata sul processo di pensiero implicato nella soluzione di problemi, data l'importanza di tale abilità nella vita quotidiana. In particolare il contributo sperimentale si è concentrato sul ruolo svolto dalla percezione in un compito di problem solving. La scelta di indagare i processi percettivo-figurali coinvolti nella soluzione di problemi è stata determinata da due ragioni:

- 1) l'importanza, sottolineata sia dalla psicologia della Gestalt (Wertheimer, 1965; Duncker, 1969) sia dagli studi contemporanei riguardanti l'apprendimento geometrico (Duval, 1995, 1999, 2006; Gorgorio, 1999; Gray, 1999; Gutierrez, 1996a, 1996b) e l'insight nel problem solving (Knoblich, Ohlsson, Haider & Rhenius, 1999; Öllinger, Jones, Knoblich, 2006, 2009) della capacità di processare e manipolare variabili figurali e rappresentative del compito/ problema da affrontare;
- 2) la natura visiva dei processi di ragionamento/ pensiero coinvolti in attività logico-computazionali, quali il pensiero matematico (Giaquinto, 2007; Lakoff & Nunez, 2005), la stretta interconnessione tra codici di elaborazione proposizionale e pittorica (Paivio, 1971, 1986) e l'importanza delle immagini mentali (Antonietti, 1994, 1995, 2001) e delle rappresentazioni grafiche (Valle- Tourangeau, Pyton, 2008; Weller, Villejoubert, & Valle- Tourangeau, 2011) nella soluzione di problemi.

Nonostante la centralità riconosciuta dalle ricerche sopra citate all'abilità di gestire le informazioni visive presenti nei compiti da affrontare, essi non hanno mai problematizzato il ruolo della contrarietà, intesa come relazione percettiva (Bianchi & Savardi, 2008; Savardi & Bianchi, 1997, 2000) nelle trasformazioni figurali coinvolte nel processo di soluzione inteso come riorganizzazione delle componenti problemiche. Nonostante Duncker (1969) abbia postulato l'eventualità che il processo di soluzione consistente in una trasposizione di funzioni implichi il cambiamento di una funzione nella sua contraria, tale questione non è stata ulteriormente approfondita dagli psicologi

gestaltisti. La presente ricerca, al contrario, ha investigato il modo in cui la manipolazione di contrari spaziali ha modificato il processo di soluzione di problemi spazio-geometrici, data l'importanza della contrarietà nell'organizzazione dell'esperienza fenomenico-percettiva dello spazio (Bianchi & Savardi 2008; Bianchi, Savardi & Kubovy, 2011; Bianchi, Savardi & Burro, 2011; Savardi & Bianchi, 2008) e nella verifica di ipotesi (hypothesis testing performance) centrale nei processi quotidiani di ragionamento e nel ragionamento scientifico (Gale & Ball, 2003, 2006, 2009, 2012).

Lo studio condotto, coniugando aspetti metodologici appartenenti alla tradizione fenomenologica sperimentale, quali l'utilizzo dell'interosservazione (Bozzi, 1978, 1989, 2002; Bozzi, Martinuzzi, 1989), il cui valore metodologico è stato formalmente riconosciuto all'interno delle scienze cognitive per lo studio dell'esperienza diretta (Kubovy, 2002), e strumenti metodologici appartenenti alle ricerche riguardanti il pensiero ad alta voce, rappresentati dall'applicazione del "Thinking Aloud Coding Scheme" (Hoffman & Lintern, 2006; Rasmussen, Pejtersen, & Schmidt, 1990) ha portato all'individuazione di un meccanismo, basato sulla contrarietà percettiva, che risulta essere a fondamento dei processi di pensiero coinvolti nella soluzione di problemi. I risultati, infatti, evidenziano la rilevanza dei contrari spaziali nella soluzione di problemi spazio-geometrici. Tale aspetto emerge dalle analisi condotte confrontando il tempo di soluzione impiegato dai gruppi a cui è stato chiesto di cercare i contrari spaziali presenti nel problema prima di risolverlo (condizione di "Ricerca") e dai gruppi a cui non era stata fatta tale richiesta (condizione di "Non ricerca"). I gruppi appartenenti alla condizione di "Ricerca" utilizzano un tempo minore per risolvere i sei problemi presentati (cfr. figura 29). Confrontando i tempi di soluzione rispetto al fattore "Suggerimento" in base al quale i gruppi si distinguono in gruppi appartenenti alla condizione del "Dato", in cui i partecipanti sono stati inviati ad utilizzare determinate conoscenze (le nozioni in un caso e i contrari nell'altro), e gruppi appartenenti alla condizione del "Non dato", in cui i partecipanti erano liberi di utilizzare le conoscenze che ritenevano più opportune per la soluzione di problemi, è emerso che i gruppi della condizione "Dato" impiegano un tempo minore



per risolvere i sei problemi presentati rispetto ai gruppi della condizione “Non dato” (cfr. figura 30). Dal momento che non è emersa una differenza significativa nel comportamento dei contrari espliciti e delle nozioni esplicite (entrambi costituiscono la condizione di “Dato”, rispetto alla distinzione delle condizioni in base al fattore “Suggerimento”) è possibile affermare che i contrari espliciti agiscono come un’euristica, al pari delle nozioni, qualora esplicitamente richiamate, riducendo il tempo di soluzione. L’euristica dei contrari risulta essere fondamentale nel processo di soluzione, preso in esame dalla codifica degli scambi verbali tra i partecipanti. Da questa analisi emerge che il processo di soluzione, considerato in maniera indipendente rispetto alla distinzione delle varie tipologie di strategie utilizzate e rispetto alla classificazione della diversa ampiezza del campo problemico preso in considerazione dai partecipanti (riferito al fatto che i partecipanti durante la soluzione del problema possono focalizzarsi o sul problema nella sua interezza, o su una parte di esso, o sulle relazioni tra il problema e le sue parti o tra le varie componenti problematiche oppure possono confrontare la situazione problematica esistente con una situazione immaginata) è diverso per i gruppi appartenenti alla condizione di “Ricerca” rispetto a quello dei gruppi appartenenti alla condizione di “Non ricerca”: il primo risulta essere un processo più economico in cui vengono ridotti il numero di tentativi e lo sviluppo di percorsi risolutivi per prove ed errori (cfr. figura 34). Questo aspetto è visibile nei risultati ottenuti mettendo a confronto i gruppi appartenenti alle due condizioni rispetto all’ampiezza del range preso in considerazione dai partecipanti durante l’applicazione di determinate strategie risolutive: essi infatti si focalizzano maggiormente su aspetti del problema che sono rilevanti per la sua soluzione (cfr. figura 40). La differenza tra le due condizioni rispetto al fattore “Ricerca contrari” è visibile prendendo in considerazione la tipologia delle soluzioni che i partecipanti hanno fornito ai problemi presentati. I partecipanti appartenenti alla condizione di “Ricerca” producono maggiori soluzioni corrette basate su trasformazioni percettive dello spazio rispetto ai gruppi appartenenti alla condizione di “Non ricerca” (cfr. figura 52). Questi ultimi, al contrario, forniscono un maggior numero di soluzioni corrette basate sull’applicazione di nozioni (cfr. figura 53). I risultati quindi dimostrano che i contrari possono

rappresentare un'euristica alternativa rispetto a percorsi strategici basati sull'applicazione di nozioni. Dal momento che i contrari risultano essere alla base di un processo di soluzione in cui si tratta di riorganizzare le componenti problemiche e dato che l'abilità di riorganizzazione della situazione esistente viene considerata fondamentale nei processi di pensiero divergente/ creativo (Guilford, 1968, 1971), lo studio condotto offre spunti per ripensare in termini di un pensiero per contrari il processo di divergenza alla base della creatività.

### **Bibliografia**

- Algoe, S.B., Fredrickson, B. (2011). Emotional Fitness and the Movement of Affective Science from Lab to Field, *American Psychology*, 66 (1), 35-42
- Anolli, L., Antonietti, A., Cantoia, M., & Crisafulli, L. (2001). Accessing source information in analogical problem solving. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54A, 237-261
- Anderson, J. R. (1978). Arguments Concerning Representations for Mental Imagery. *Psychological Review*, 85, 249-277
- Andersson, U. (2010). Skill Development in Different Components of Arithmetic and Basic Cognitive Functions: Findings From a 3-Year Longitudinal Study of Children with Different Types of Learning Difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 102 (1), 115-134
- Antonietti, A., Angelini, C., Cerana, P. (1995). *L'intuizione visiva*. Milano: Franco Angeli
- Antonietti, A. (1994). *Il pensiero efficace*. Milano: Franco Angeli
- Antonietti, A. (2001). *Analogical discoveries. Identifying similarities to solve problems*. Roma: Carocci
- Aristotele (1989). *Le Categorie*. Rizzoli.
- Aristotele (1990). *Topici*. in Opere, vol. 2. Laterza.
- Aristotele (1993). *Metafisica*. Rusconi
- Asch, S. E. (1968). *Psicologia sociale*. Torino: Società Editrice Internazionale

- Baccaglioni-Frank, A., Mariotti, M. A., Antonini S. (2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp.89-96). Thessaloniki, Greece: PME
- Baddely, A. D. (2007). *Working memory, thought, and action*. New York: Oxford University Press
- Battista, M. T., Wheatley, G. H., Talsma, G. (1982). The Importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13 (5), 332-340
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 294–323.
- Beishuizen, M., Van Putten, C. M., & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction*, 7, 87–106.
- Bianchi, I., & Savardi, U. (2007). L'errore tra vedere e pensare. *Dipav*, 19, 113- 130
- Bianchi, I., & Savardi, U. (2008). *The perception of Contraries*. Milan, Italy: Franco Angeli
- Bianchi, I., Savardi, U., Kubovy, M. (2011). Dimensions and Their Poles: a Metric and Topological Approach to Opposites. *Language and Cognitive Processes*, 26 (8), 1232-1265
- Bianchi, I., Savardi, U., & Burro R. (2011). Perceptual ratings of opposite spatial properties: Do they lie on the same dimension. *Acta Psychologica*, 138 (3), 405-418
- Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics achievement- A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269
- Bishop, A. J. (1989). A review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16
- Blöte, A., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, 93, 627–638

- Bonini, N., Tentori, K., Osherson, D. (2004). A Different conjunction fallacy. *Mind And Language*, 19, 199- 210
- Bonner, B. L., Baumann, M. R., Dalal, R. S. (2002). The effects of member expertise on group decision-making and performance. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 88, 719-736
- Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41, 189–201
- Booth, J. L., Siegler, R. S. (2008). Numerical Magnitude Representations Influence Arithmetic Learning. *Child Development*, 79 (4), 1016-1031
- Bowden, E. M., Jung-Beeman, M., Fleck, J., Kounios, J. (2005). New approaches to demystifying insight. *Trends in Cognitive Sciences*, 9, 322-328
- Bozzi, P. (1972). Cinque varietà di errore dello stimolo. *Rivista di psicologia*, LXVI, fasc. 3-4
- Bozzi, P. (1978). L'interosservazione come metodo per la fenomenologia sperimentale. *Giornale Italiano di Psicologia*, 5, 229-239
- Bozzi, P., Martinuzzi, L. (1989). Un esperimento di interosservazione. *Rivista di psicologia*, 1, 1-46
- Bozzi, P. (1989). *Fenomenologia sperimentale*. Bologna, Italy: Il Mulino
- Bozzi, P. (1991). Sulle descrizioni di eventi percettivi sotto osservazione. *Intersezioni*, XI (1), 75-85
- Bozzi, P. (1998). Considerazioni eccentriche sull'errore dello stimolo. *Giornale Italiano di Psicologia*, XXV (2), 239- 252
- Bozzi, P. (1999). Direi che nei discorsi che noi facciamo occorre che l'analisi delle virtù degli oggetti sotto osservazione sia fatta alla luce dell'errore dello stimolo, ma. In U. Savardi, & I. Bianchi (Eds). *Gli errori dello stimolo*. Verona: Cierre Edizioni
- Bozzi, P. (2002). Fenomenologia sperimentale, *Teorie & Modelli*, VII (2-3), 13-48

- Bracco, F., Chiorri, C., Tarozzi, D., & Partena, P. (2008). Methodological issues about interobservation: An example from an attraction effect study. *Teorie & Modelli*, n. s., XIII, 2-3, 149-158
- Branchini, E., Burro, R., Savardi, U. (2009). Contraries in productive thinking. In Savardi, U. (Eds.), *The perception and cognition of contraries* (pp. 203-224). Milan, Italy: McGraw-Hill
- Brem, S. K., Rips, L. J. (2000). Explanation and Evidence in Informal Argument. *Cognitive Science*, 24 (4), 573-604
- Bühler, K. (1907). Tatsachen und Probleme zu einer Psychologie der Denkvorgänge. *Archiv für Psychologie*, 9, 297-365.
- Burge, T. (1993). Content preservation. *The Philosophical Review*, 102 (4), 457-488
- Burns, N. R., Bastian, V., & Nettlebeck, T. (2007). Emotional intelligence: More than personality and cognitive ability? In Matthews, G., Zeidner, M., & Roberts, R. D. (Eds.), *Emotional intelligence: knows and unknowns* (pp. 167-196). Oxford: Oxford University Press
- Burns, N. R., Nettlebeck, T., McPherson, J. (2009). Attention and Intelligence. A Factor Analytic Study. *Journal of Individual Differences*, 30 (1), 44-57
- Butterworth, B., Zorzi, M., Girelli, L., Jonkheere, A. R. (2001). Storage and retrieval of addition facts: The role of number comparison. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54A (4), 1005-1029
- Byrne, R. M. J., Johnson- Laird, P. N. (1989). Spatial reasoning. *Journal of Memory and Language*, 28 (5), 564-575
- Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, 19, 81-93
- Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. (Report No. 00-2). Madison, WI: University of Wisconsin-Madison, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science

- Carr, M., & Davis, H. (2001). Gender differences in arithmetic strategy use: A function of skill and preference. *Contemporary Educational Psychology*, 26, 330–347.
- Carr, M., & Jessup, D. L. (1997). Gender differences in first-grade mathematics strategy use: Social and metacognitive influences. *Journal of Educational Psychology*, 89, 318–328
- Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor analytic studies*. New York: Cambridge University Press
- Cherubini, P., Castelvechio, E., & Cherubini, A. M. (2005). Generation of hypotheses in Wason's 2–4–6 task: An information theory approach. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 58A, 309–332.
- Chi, M. T., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, 13, 145–82
- Chi, M. T. H., deLeeuw, N., Chiu, M., & LaVancher, C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive Science*, 18, 439–77
- Clements, D. H., Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In Grows, D. A. (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.420-464). New York: Macmillan Publishing Company
- Cohen, L. J. (1981). Can human irrationality be experimentally demonstrated? *Behavioral and Brain Sciences*, 4, 317- 331
- Cohen, D., & Kubovy, M. (1993). Mental Rotation, Mental Representation, and Flat Slopes. *Cognitive Psychology*, 25, 351-382
- Conrad, K. J., Wright, B. D., McKnight, P. E., McFall, M., Fontana, A., & Rosenheck, R.(2004). Comparing traditional and Rasch analyses of the Mississippi PTSD scale:Revealing limitations of reverse-scored items. *Journal of Applied Measurement*,5(1), 15–30.
- Copi, I. M., & Burgess-Jackson, K. (1996). *Informal logic*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall

- Costa, P. T., Jr., & McCrae, R. R. (1992a). Four ways five factors are basic. *Personality and Individual Differences*, 13, 653–665.
- Costa, P. T., Jr., & McCrae, R. R. (1992b). *NEO PI-R Professional Manual*. Odessa, FL: Psychological Assessment Resources
- Croft, W., & Cruse, D. A. (2004). *Cognitive Linguistics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Davis, M. A. (2009). Understanding the relationship between mood and creativity: A Meta-analysis. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 108, 25-38
- De Bono, E. (1967). *The use of lateral thinking*. London: Cape.
- De Bono, E. (1970). *Lateral thinking. A textbook of creativity*. UK: Mica Management Resources Inc.
- Dehaene, S., Bossini, S., Giraux, P. (1993). The Mental Representation of Parity and Number Magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122 (3), 371-396
- Dehaene, S., Dehaene-Lambertz, G., Cohen, L. (1998). Abstract representations of numbers in the animal and human brain. *Trend in Neurosciences*, 21 (8), 355-361
- DeYoung, C. G., Peterson, J. B., & Higgins, D. M. (2005). Sources of Openness/Intellect: Cognitive and neuropsychological correlates of the fifth factor of personality. *Journal of Personality*, 73, 825-858
- DeYoung, C. G., Quilty, L. C., & Peterson, J. B. (2007). Between facets and domains: Ten aspects of the Big Five. *Journal of Personality and Social Psychology*, 93, 880-896
- DeYoung, C. G., Braver, T. S., Shamosh, N. A., Green A. E., Gray, J. R. (2009). Intellect as Distinct from Openness: Differences Revealed by fMRI of Working Memory. *Journal of Personality and Social Psychology*, 97 (5), 883-892
- Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Hove, England: Psychology Press
- Duncker, K. (1926). A qualitative (experimental and theoretical) study in productive thinking (solving of comprehensible problems). *Pedagogical Seminary*, 33, 642- 708

- Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie Des Productive Denkes*. Berlin: Springer
- Duncker, K. (1945). On Problem-Solving. *Psychological Monographs*, 58 (5) , 1-113
- Duncker, K. (1969). *La psicologia del pensiero produttivo*. Firenze: Giunti
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific Processings. In Sutherland, R., & Mason, J. (Eds.). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-26). Merlos, Mexico
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131
- Ebbinghaus, H. (1885). *Über das Gedächtnis. Untersuchungen zur experimentellen Psychologie*. Berlino: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Edwards, D. (1997). *Discourse and Cognition*. London: Sage
- Edwards, L. (2009). Gesture, conceptual integration and mathematical talk. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 1, 33-46
- Ekman, P., & Oster, H. (1979). Facial Expression of Emotions. *Annual Review of Psychology*, 30, pp. 527-554
- Evans, J. St. B. T. (1989). *Bias in human reasoning: causes and consequences*. Hove, UK: Erlbaum
- Evans, J. St. B. T. (1995). Relevance and Reasoning. In Newstead, S. E., Evans, J. St. B. T. (Eds.). *Perspectives on Thinking and Reasoning. Essays in Honour of Peter Wason*. Hove: Erlbaum
- Evans, J. St. B. T. (2007). *Hypothetical thinking: Dual process in reasoning and judgement*. Hove, UK: Psychology Press



- Evans, J. St. B. T. (1996). Deciding before you think: Relevance and reasoning in the selection task. *British Journal of Psychology*, 87, 223- 240
- Evans, J. St. B. T. (2008). Dual-processing accounts of reasoning, judgment and social cognition. *Annual Review of Psychology*, 59, 255–278
- Evans, J. St. B. T., Barston, J., Pollard, P. (1983). On The Conflict Between Logic And Belief In Syllogistic Reasoning. *Memory & Cognition*, 11 (3), 295–306
- Evans, J. St. B. T., Clibbens, J., Rood, B. (1995). Bias in conditional inference: Implications for mental models and mental logic. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 48 A, 644- 670
- Evans, J. St. B. T., Clibbens, J., Rood, B. (1996). The role of implicit and explicit negation in conditional reasoning bias. *Journal of Memory and Language*, 35, 392- 404
- Evans, J. St. B. T., Handley, S. J., Bacon, A. M. (2009). Reasoning Under Time Pressure. A Study of Causal Conditional Inference. *Experimental Psychology*, 56 (2), 77-83
- Evans, J. St. B. T., Handley, S. J., Harper, C. N. J., & Johnson-Laird, P. N. (1999). Reasoning About Necessity and Possibility: A Test of the Mental Model Theory of Deduction. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 25 (6), 1495-1513
- Evans, J. St. B. T., Handley, S. J., Harper, C. N. J., Johnson- Laird, P. N. (1999). Reasoning About Necessity And Possibility: A test of Mental Model Theory of Deduction. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 25 (6), 1495- 1513
- Evans, J. St. B. T., Newstead, S. E., Byrne, R.M. (1993). *Human Reasoning: The Psychology of Deduction*. Hillsdale: Erlbaum
- Evans, J. St. B. T., & Over, D. E. (1996). *Rationality and reasoning*. Hove: Psychology Press
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), 139-162
- Francaviglia, M., Servidio, R. (2011). Gesture as Cognitive Support to Solve Mathematical Problems. *Psychology*, 2 (2), 91- 97

- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C. (2006). Cognitive Correlates of Third-Grade Skill in Arithmetic, Algorithmic Computation, and Arithmetic Word Problems. *Journal of Educational Psychology*, 98 (1), 29-43
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Hamlett, C. L., Lambert, W., Stuebing, K, Fletcher, J. M. (2008). Problem Solving and Computational Skill: Are They Shared or Distinct Aspects of Mathematical Cognition?. *Journal of Educational Psychology*, 100 (1), 30-47
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. L., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130–162
- Gale, M., & Ball, L. J. (2003). Facilitated rule discovery in Wason's 2- 4- 6 task: The role of negative triples. In R. Alterman & D. Kirsh (Eds.), *Proceedings of the twenty-fifth annual conference of the cognitive science society* (pp. 438- 443). Boston: Cognitive Science Society
- Gale, M., & Ball, L. J. (2006). Dual-goal facilitation in Wason's 2- 4- 6 task: What mediates successful rule discovery? *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 59, 873- 885
- Gale, M., & Ball, L. J. (2009). Exploring the determinants of dual goal facilitation in a rule discovery task. *Thinking and Reasoning*, 15, 294- 315
- Gale, M., & Ball, L. J. (2012). Contrast class cues and performance facilitation in a hypothesis-testing task: evidence for an iterative counterfactual model. *Memory and Cognition*, 40, 408- 419.
- Gallistel, C. R., Gelman, R. (2000). Non-verbal numerical cognition: from reals to integers. *Trends in Cognitive Sciences*, 4 (2), 59-65
- Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligence*. New York: Basic Books
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37, 4–15
- Geary, D. C., & Hoard, M. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: Theoretical and empirical perspectives. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 253–267). New York: Psychology Press

- Giaquinto, M.(2007). *Visual thinking in mathematics*. Oxford: Oxford University Press
- Giaretta, P. (2007). Errori di ragionamento deduttivo: concetti e principi per una loro classificazione. *Dipav*, 19, 69- 82
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical Problem Solving. *Cognitive Psychology*, 12, 306-355
- Gilbert, N. (1993). *Researching Social Life*. London: Sage
- Gilmore, C. K., Spelke, E. S. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition*, 107, 932-945
- Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic*. New York, NY: Van Nostrand
- Giroto, V., Kemmelmeier, M., Sperber, D. & Van der Henst, J.-B. (2001). Inept reasoners or pragmatic virtuosos? Relevance and the deontic selection task. *Cognition*, 81 (2), 69–76.
- Goldman, S., & Hasselbring, T. S. (1997). Achieving meaningful mathematics literacy for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 198–208
- Gorgorio, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231
- Gorman, M. E., & Gorman, M. E. (1984). A comparison of disconfirmatory, confirmatory and a control strategy on Wason's 2–4–6 task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 36A,629–648
- Gorman, M. E., Gorman, M. E., Latta, R. M., & Cunningham, G. (1984). How disconfirmatory, confirmatory and combined strategies affect group problem solving. *British Journal of Psychology*, 75,65–74.
- Gorman, M. E., Stafford, A., & Gorman, M. E. (1987). Disconfirmation and dual hypotheses on a more difficult version of Wason's 2–4–6 task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 39A, 1–28.

- Gray, E. (1999). Spatial strategies and visualisation, (communication to the *Imagery and Visualisation Research Forum of PME XXIII*)
- Grudina, V., Burro, R., Savardi, U. (2009),. L'organizzazione cognitiva delle conoscenze: verifica sperimentale di un modello basato sulle mappe concettuali. *DiPAV*, 26, pp. 51-74
- Guilford, J. P. (1968). *Intelligence, creativity and their educational implications*. San Diego: R. R. Knapp
- Guilford, J. P. (1971). *The nature of human intelligence*. Londra: McGraw Hill
- Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry. *Topologie structurale*, 18, 31-47
- Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In *Proceedings of the 20th PME Conference*, Vol. 1 (pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia
- Gutiérrez, A. (1996b). Children's ability for using different plane representations of space figures. In Batturo, A. R. (Eds.), *New directions in geometry education* (pp. 33-42). Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q. U. T
- Gutiérrez, A., Pegg, J., Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. In *Proceedings of the 28<sup>th</sup> Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 511-518). Cape Town, South Africa
- Hahn, U., Oaksford, M. (2007). The rationality of informal argumentation: A bayesian approach to reasoning fallacies. *Psychological Review*, 114 (3), 704-732
- Harris, L. J. (1981). Sex-related variations in spatial skill. In Liben, L. S., Patterson, A. H., & Newcombe (Eds.), *Spatial representation and behavior across the life span* (pp. 83-125). New York: Academic Press
- Harrower, M. R. (1932). Organization in higher mental processes. *Psychologische Forschung*, 17, 56-120

- Hart, S. A., Petrill, S. A., Plomin, R., Thompson, L. A. (2009). The ABCs of Math: A Genetic Analysis of Mathematics and Its Links With Reading Ability and General Cognitive Ability. *Journal of Educational Psychology*, 101 (2), 388-402
- Herbst, P. G. (2006). Teaching Geometry With Problems: Negotiating Instructional Situations and Mathematical Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (4), 313-347
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In Nesher, P., Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for The Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press
- Hess, U., Thibault, P. (2009). Darwin and Emotion Expression. *American Psychologist*, 64 (2), 120-128
- Hickendorff, M., van Putten, C. M., Heiser, W., Verhelst, N. D. (2010). Individual Differences in Strategy Use on Division Problems: Mental Versus Written Computation. *Journal of Educational Psychology*, 102 (2), 438-452
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Hoffman, R. R., & Lintern, G. (2006). Eliciting and representing the knowledge of experts. In Ericsson, K. A., Charness, N., Feltovich, P., & Hoffman, R. (Eds.). *Cambridge handbook of expertise and expert performance* (pp. 203-222). Cambridge University Press, New York
- Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E., Thagard, P. R. (1986). *Induction: Processes of Inference, Learning and Discovery*. Cambridge: MIT Press
- Idaszak, J., & Drasgow, F. (1987). A revision of the job diagnostic survey: Elimination of a measurement artifact. *Journal of Applied Psychology*, 72, 69–74.

- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 258–288
- Johnson, J. A. (1994). Clarification of factor five with the help of the AB5C model. *European Journal of Personality*, 8, 311–334.
- Johnson, E. J., Hershey, J., Meszaros, J., Kunreuther, H. (1993). Framing, probability distortions, and insurance decisions. *Journal of Risk and Uncertainty*, 7, 35- 51
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University press
- Johnson -Laird, P. N. (1993). *Deduzione induzione creatività. Pensiero umano e pensiero meccanico*. Bologna: Il Mulino
- Johnson-Laird, P. N. (1999). Deductive Reasoning. *Annual Review of Psychology*, 50, 109- 135
- Johnson-Laird, P. N., & Byrne, R. (1991). *Deduction*. Hove, England: Erlbaum
- Johnson-Laird, P.N. , & Byrne, R.M.J. (2002). Conditionals: a theory of meaning, pragmatics, and inference. *Psychological Review*, 109, 646-678
- Johnson-Laird, P.N., & Wason, P. C. (1970). A Theoretical Analysis of Insight Into a Reasoning Task. *Cognitive Psychology*, 1, 134- 148
- Jones, S. (2002). *Antonymy. A corpus based perspective*. London: Routledge.
- Jones, K., & Bills, C. (1998). Visualisation, Imagery, and the Development of Geometrical Reasoning. In *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18 (1&2), pp. 123-128
- Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Uberti, H. Z. (2003). Mathematical thinking and learning difficulties. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 359–383). Mahwah, NJ: Erlbaum
- Jung-Beeman, M., Bowden, E., Haberman, J., Frymiare, J., Arambel-Liu, S., Greenblatt, R., et al. (2004). Neural activity when people solve verbal problems with insight. *Plos Biology*, 2, 500-510

- Kahneman, D., & Frederick, S. (2002). Representativeness revisited: Attribute substitution in intuitive judgement. In T. Gilovich, D. Griffin, & D. Kahneman (Eds.), *Heuristics and biases: The psychology of intuitive judgment* (pp. 49–81). Cambridge: Cambridge University Press.
- Kahneman, D., Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430- 454
- Kahneman, D., Tversky, A. (1973). On psychology of prediction. *Psychological Review*, 80, 237-251
- Kahneman, D. (2003). A perspective on judgment and choice: Mapping Bounded rationality. *American Psychologist*, 58 (9), 697-720
- Kanizsa, G. (1972). Errori del Gestaltista ed altri errori- da – aspettativa. *Rivista di Psicologia*, 66, 3-18
- Kanizsa, G. (1973). Il problem solving nella psicologia della Gestalt. In Mosconi, G., D’Urso, V. (Eds.), *La soluzione dei problemi* (pp. 35-86). Firenze: Giunti Barbera.
- Kanizsa, G. (1975). Pragnanz as an obstacle to problem- solving. *Giornale italiano di psicologia*, 2 (3), 417-425
- Kanizsa, G. (1980). *La grammatica del vedere*. Bologna: Il Mulino
- Kanizsa, G. (1991). *Vedere e pensare*. Bologna: Il Mulino
- Kanizsa, G. & Luccio, R. (1989): Fenomenologia della formazione di un ordine autonomo della percezione. *Rivista di Psicologia*, 3, 28-46.
- Kareev, Y., Halberstadt, N., & Shafir, D. (1993). Improving performance and increasing the use of non-positive testing in a rule-discovery task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 46A, 729–742
- Kay, P., Zimmer, K. (1976). On the semantics of compounds and genitives in English. In *Sixteenth California Linguistics Association Proceedings*, San Diego: Campile Press

- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press
- Klauer, K. C., Oberauer, K. (1995). Testing Mental Model Theory of Propositional Reasoning. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 48(A) (3), 671-687
- Knoblich, G., Ohlsson, S., Haider, H., & Rhenius, D. (1999). Constraint Relaxation and Chunk Decomposition in Insight Problem Solving. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 25 (6), 1534-1555
- Knoblich, G., Ohlsson, S., Raney, G. E. (2001). An eye movement study of insight problem solving. *Memory & Cognition*, 29 (7), 1000-1009
- Kocher, M. G., Sutter, M. (2005). The decision maker matters: individual versus group behavior in experimental beauty- contest games. *The Economic Journal*, 115, 200-223
- Koffka, K. (1935). *Principles of gestalt psychology*. H. Harcourt Brace, New York: . Tr. it. *Principi di psicologia della forma*. Torino: Boringhieri 1970.
- Kogan, N. (1971). Educational implications in cognitive styles. In Lesser, G. S. *Psychology and educational practice* (pp. 242-292). Glenview, Scott & Foresman
- Köhler, W. (1920). *Intelligenzprüfungen an Menschenaffen*. Berlin: Springer.
- Köhler, W. (1929). *Gestalt Psychology*. Liveridge New York:. Tr.it. *La Psicologia della Gestalt*. Feltrinelli 1961
- Köhler, W. (1929b). L'organizzazione sensoriale. *Gestalt Psychology*, 94- 117. New York: Liveridge. Trad. It. (1961). *La psicologia della Gestalt*. Milano: Feltrinelli
- Köhler, W. (1969). *The task of gestalt psychology*. Princeton: Princeton University Press.
- Köhler, W. (1971). *Evoluzione e compiti della psicologia della forma*. Roma: Armando
- Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the mind's machine. Creating and Using Images in the Brain*. New York: W. W. Norton and Co. Trad. it. (1999), *Le immagini nella mente. Creare ed utilizzare le immagini nel cervello*. Firenze: Giunti.



- Kosslyn, S. M. (1994). *Image and brain: The resolution of the imagery debate*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Kosslyn, S. M., Ball, T. M., & Reiser, B. J. (1978). Visual images preserve metric spatial information: Evidence from studies of image scanning. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 4, 47-60
- Kubovy, M. (2002). Phenomenology, Cognitive. In Nadel, L. (Eds.), *Encyclopedia of Cognitive Science* (pp. 579-586). Houndmills, Basingstoke, Hampshire, UK: Nature Publishing Group
- Lakoff, G., Nunez, R. E. (2005). *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*, Torino: Bollati Boringhieri
- Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development*, 76, 1723–1743.
- Laughlin, P. R., Bonner, B. L., Miner, A. G. (2002). Groups perform better than the best individuals on Letters- to- Numbers problems. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 88, 605-620
- Laughlin, P. R., Hatch, E. C., Silver, J. S, Boh, L. (2006). Groups perform better than the best individuals on Letters- to- Numbers problems: Effects of Group size. *Journal of Personality and Social Psychology*, 90 (4), 644-651
- Lee, K., Ng, E. L., Ng, S. F. (2009). The Contribution of Working Memory and Executive Functioning to Problem Representation and Solution Generation in Algebraic Word Problems. *Journal of Educational Psychology*, 101 (2), 373-387
- Legrenzi, P., & Sonnino, M. (1999). L'errore dello stimolo non viene fatto solo in psicologia della percezione. In U. Savardi, & I. Bianchi. (Eds.). *Gli errori dello stimolo* (pp. 207- 210). Verona: Cierre Edizioni

- Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124, 83–97
- Levine, M. (1988). *Effective problem solving*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall
- Levorato, M. C., & Massironi, M. (1991). Dall'immagine al linguaggio: uno studio dei processi percettivi implicati nella descrizione di figure. *Versus. Quaderni di studi semiotici*, 59-60, 141-171
- Levorato, M. C., & Massironi, M. (1998). Formal characteristics in verbal description. In Albertazzi, L. *Shapes of forms* (149-176). The Netherlands: Kluwer Academic Publisher
- Levorato, M. C., Massironi, M., & Rigon, C. (1994). Descrizioni Linguistiche di figure non familiari. *Giornale Italiano di Psicologia*, 421-460
- Lindvall, C. M., & Ibarra, C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 50–62
- Lucas, E. J., & Ball, L. J. (2005). Think- aloud protocols and the selection task: Evidence for relevance effects and rationalization processes. *Thinking and Reasoning*, 11 (1), 35- 66
- Luchins, A. S. (1942). Mechanization in problem solving. *Psychological Monographs*, 54 (248), 1-95
- Luchins, A. S. (1946). Classroom Experiments on Mental Set. *The American Journal of Psychology*, 59 (2), 295-298
- Luchins, A. S., & Luchins, E. H. (1950). New experimental attempts at preventing mechanization in problem solving. *Journal of General Psychology*, 42, 279-297
- Luchins, A. S., & Luchins, E. H. (1970). *Wertheimer's seminars revisited problem solving and thinking. Volume I-II-III*. New York: State University of New York At Albany, Inc.
- Luchins, A. S., & Luchins, E. H. (1990). The Einstein-Wertheimer Correspondence on Geometric Proofs and Mathematical Puzzles. *Mathematical Intelligencer*, 12 (2), 35-43
- Luo, J., Niki, K., Knoblich, G. (2006). Perceptual contributions to problem solving: Chunk decomposition of Chinese characters. *Brain Research Bulletin*, 70, 430-443

- Maier, N. F. R. (1930). Reasoning in humans. On direction. *Journal of Comparative Psychology*, 115-143
- Maier, N. F. R. (1931a). Reasoning and learning. *Psychological Review*, 332-346
- Maier, N. F. R. (1931b). Reasoning in humans. The solution of a problem and its appearance in consciousness. *Journal of Comparative Psychology*, 12, 181-194
- Maier, N. F. R. (1945). Reasoning in humans. The mechanisms of equivalent stimuli and of reasoning. *Journal of Experimental Psychology: General*, 35 (5), 349-360
- Mariotti, M. A. (1996). Costruzioni in geometria: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B (3), 261-287
- Marrades, R., Gutiérrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125
- Masin, S. C. (1989). L'errore dello stimolo e l'errore dell'esperienza. *Analisi del mondo reale*, pp. 71- 79. Padova: Liviana Editrice
- McNeill, D. (1996). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: The University of Chicago Press
- McCloskey, M., Aliminosa, D., & Macaruso, P. (1991). Theory-based assessment of acquired dyscalculia. *Brain and Cognition*, 17, 285–308
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86, 889-918
- Mercier, H. (2009). *La Théorie argumentative du raisonnement*. Ecole des hautes études en sciences sociales. Tesi di dottorato
- Mercier, H. & Sperber, D. (2009) Intuitive and reflective inferences. In J. St. B. T. Evans & K. Frankish, *In two minds: Dual processes and beyond* (pp.149–70). Oxford University Press.
- Mercier, H., Sperber, D. (2011). Why do humans reason? Arguments for an argumentative theory. *Behavioral and Brain Sciences*, 34, 57-111

- Merrifield, P. R., Guilford, J. P., Christensen, P. R., & Frick, J. W. (1962). The role of intellectual factors in problem solving. *Psychological Monographs*, 76 (10, Whole No 529)
- Metcalf, J. (1986a). Feeling of knowing in memory and problem solving. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 12, 288-294
- Metcalf, J. (1986b). Premonitions of insight predict impending error. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 12, 623-634
- Metcalf, J. & Wiebe, D. (1987). Intuition in insight and noninsight problem solving. *Memory & Cognition*, 15, 238-246.
- Metzger, W. (1941). *Psychologie*. Darmstadt: Dietrich Steinkopff. Trad. It. “*I Fondamenti della Psicologia della Gestalt*”, Firenze: Giunti, 1971
- Millis, K. K., & Neimeyer, R. A. (1990). A test of the dichotomy corollary: Propositions versus constructs as basic cognitive units. *International Journal of Personal Construct Psychology*, 3, 167–181.
- Ministero della Pubblica Istruzione.(1995-1996). *L'insegnamento della geometria*. Lucca: Liceo scientifico Statale “A. Vallisneri”
- Morgan, P. L., Patrick, J., Waldron, S. M., King, S. L., Patrick, T. (2009). Improving Memory after Interruption: Exploiting Soft Constraints and Manipulating Information Access Cost. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 15 (4), 291-306
- Mosconi, G. (1999). Alla domanda se esiste l'errore dello stimolo nella psicologia del pensiero, si può rispondere che c'è. In U. Savardi, & I. Bianchi (Eds.) *Gli errori dello stimolo* (pp. 201- 206). Verona: Cierre Edizioni
- Murphy, G. L. (1988). Comprehending complex concepts. *Cognitive Science*, 12, 529- 562
- Murphy, G. L. (1990). Noun phrase interpretation and conceptual combination. *Journal of Memory and Language*, 29, 259- 288

- Mynatt, C. R., Doherty, M. E., & Tweney, R. D. (1977). Confirmation bias in a simulated research environment: An experimental study of scientific inference. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 29, 85–95.
- Mynatt, C. R., Doherty, M. E., & Tweney, R. D. (1978). Consequences of confirmation and disconfirmation in a simulated research environment. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 30, 395–406.
- Nerney, G. (1979). The Gestalt of problem solving: an interpretation of Max Wertheimer's productive thinking. *Journal of Phenomenological Psychology*, 10 (1), 56- 80
- Neuman, Y. (2003). Go ahead, prove that God does not exist! On high school students' ability to deal with fallacious arguments. *Learning and Instruction*, 13 (4), 367-380
- Neuman, Y., Weinstock, M. P., & Glasner, A. (2006). The effect of contextual factors on the judgement of informal reasoning fallacies. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 59 (2), 411-425
- Newell, A., Shaw, J. C., Simon, H. A. (1958). Elements of a theory of human problem solving. *Psychological Review*, 65 (3), 151-166
- Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs: Prentice Hall
- Nickerson, R. S. (1998) Confirmation bias: A ubiquitous phenomena in many guises. *Review of General Psychology*, 2 (2), 175–220.
- Norman, D. A. (1981). Categorization of action slips. *Psychological Review*, 88 (1), 1- 15
- Novick, L. R., and Sherman, S.J. (2003). On the nature of insight solutions: Evidence from skill differences in anagram solution. *Quarterly Journal of Experimental Psychology Section A-Human Experimental Psychology*, 56, 351-382
- Oaksford, M. (2002). Contrast classes and matching bias as explanations of the effects of negation on conditional reasoning. *Thinking and Reasoning*, 8, 135–151.
- Oatley, K. (1992). *Best Laid Schemes. The Psychology of Emotions*. Cambridge: Cambridge University Press

- Öllinger, M., Jones, G., Knoblich, G. (2006). Heuristics and representational change in two-move matchstick arithmetic tasks. *Advances in Cognitive Psychology*, 2 (4), 239-253
- Öllinger, M., Jones, G., Knoblich, G. (2008). Investigating the Effect of Mental Set On Insight Problem Solving. *Experimental Psychology*, 55 (4), 269-282
- Öllinger, M., Jones, G., Faber, A. H., & Knoblich, G. (2012, July 16). Cognitive Mechanisms of Insight: The Role of Heuristics and Representational Change in Solving the Eight-Coin Problem. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*. Advance online publication
- Osherson, D. N., Smith, E. E., Wilkie, O., Lopez, A., Shafir, E. (1990). Category- based induction. *Psychological Review*, 97, 185- 200
- Paivio, A. (1965). Abstractness, imagery and meaningfulness in paired-associate learning. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 4, 32-38
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Paivio, A. (1986). *Mental representations. A Dual Coding Approach*. Oxford: Oxford University Press
- Paradis, C. & Willners, C. (2011). Antonymy: from convention to meaning making. *Review of Cognitive Linguistics*, 9 (2), pp. 367-391
- Pessa, E., Contreras, L., & Penna, M. P. (1992). Complessità di pattern e rotazione di immagini mentali. *Ricerche di Psicologia*, 2, 45-63
- Pinna, B. (2005): Riflessioni fenomenologiche sulla percezione delle qualità emergenti: verso una riconsiderazione critica della teoria della Pregnanza. *Annali della Facoltà di Lingue e Letterature Straniere dell'Università di Sassari* 3, 211-256.
- Podsakoff, P. M., MacKenzie, S. B., Lee, J. -Y., & Podsakoff, N. P. (2003). Common method biases in behavioral research: A critical review of the literature and recommended remedies. *Journal of Applied Psychology*, 88(5), 879–903.
- Poletiek, F. H. (2001). *Hypothesis- testing, behaviour*. Hove, UK: Psychology Press

- Polya, G. (1945). *How to Solve It*. New Jersey: Princeton University Press.
- Popper, K. (1959). *The logic of scientific discovery*. London: Hutchinson
- Potter, J. (1996). *Representing Reality*. London: Sage
- Powell, S. R., Fuchs, L. S. (2010). Contribution of Equal- Sign Instruction Beyond Word-Problem Tutoring for Third-Grade Students with Mathematics Difficulty. *Journal of Educational Psychology*, 102 (2), 381-394
- Pylyshyn, Z. W. (1973). What the Mind's Eye Tells the Mind's Brain: A Critique of Mental Imagery. *Psychological Bulletin*, 80, 1-24
- Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 91-95.
- Rasmussen, J. (1982). Human Errors : a taxonomy for describing human malfunction in industrial installation. *Journal of Occupational Accidents*, 4, 311- 335
- Rasmussen, J. (1985). The role of hierarchical knowledge representation in decision-making and system-management. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15 , 234– 243.
- Rasmussen, C., Ho, E., Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 89-102
- Rasmussen, J., Pejtersen, A. M., & Schmidt, K. (1990). *Taxonomy for Cognitive Work Analysis*. Danimarca: Risø National Laboratory
- Rasmussen, J., Petjersen, A. M., & Goodstein, L. P. (1994). *Cognitive systems engineering*. New York: John Wiley.
- Reason, J. (1990). *Human Error*. Cambridge: Cambridge University press
- Roberts, M. J., & Newton, E. J. (2001). Inspection times, the change task, and the rapid response selection task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, Section A: Human Experimental Psychology*, 54 (4), 1031- 1048

- Robinson, K. M., Arbuthnott, K. D., Rose, D., McCarron, M. C., Globa, C. A., & Phonexay, S. D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 93, 224–238
- Robinson, K. M., Ninowsky J. E. (2003). Adults' Understanding of Inversion Concepts: How Does Performance on Addition and Subtraction Inversion Problems Compare to Performance on Multiplication and Division Inversion Problems?. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 57 (4), 321-330
- Robinson, K. M., Ninowsky, J. E., Gray, M. L. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology*, 94, 349-362
- Robinson, K. M., Dubé, A. K. (2009). A Microgenetic Study of the Multiplication and Division Inversion Concept. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 63 (3), 193-200
- Rottenstreich, Y., Tversky, A. (1997). Unpacking, repacking, and anchoring: Advances in support theory. *Psychological Review*, 104, 406-415
- Turchi, G. (2009). *Dati senza numeri*. Bologna: Monduzzi Editore
- Turchi, G., Cellenghin, E. (2010). *Dialoghi di e su Psicologia delle differenze culturali e clinica della devianza come occasione peripatetica per un'agorà delle politiche sociali*. Padova: Domeneghini Editore
- Saucier, G. (1992). Openness versus intellect: Much ado about nothing? *European Journal of Personality*, 6, 381–386
- Savardi, U., Bianchi, I. (1996). *Qualità e contrarietà da una prospettiva fenomenologica alle categorie di Aristotele*. Estratto da “Annali dell'Istituto di Psicologia 1996”. Verona: Cierre Edizioni
- Savardi, U., Bianchi, I. (1997). *I luoghi della contrarietà*. Turin, Italy: Upsel editore
- Savardi, U., & Bianchi, I. (1999). Dall'errore dello stimolo all'errore. In U. Savardi, & I. Bianchi (Eds.). *Gli errori dello stimolo*. Verona: Cierre Edizioni



- Savardi, U., Bianchi, I. (2005). Looking at yourself in the mirror: structures of perceptual opposition. *Gestalt Theory*, 27 (3), 1-17
- Savardi, U. Bianchi, I. (2009). The spatial path to contrariety. In Savardi, U. (Eds.), *The perception and cognition of contraries* (pp. 66- 92). Milano, Italy: McGraw-Hill
- Savardi, U. (Eds.) (2009). *The perception and cognition of contraries*. Milano: McGraw- Hill
- Schmiedek, F., Hildebrandt, A., Wilhelm, O., Lövdén, M., Lindenberger, U., (2009). Complex Span Versus Updating Tasks of Working Memory: The Gap Is Not That Deep. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 35 (4), 1089-1096
- Schweizer, K., Moosbrugger, H., & Goldhammer, F. (2005). The structure of the relationship between attention and intelligence. *Intelligence*, 33, pp. 589-611
- Sellen, A. J. (1990). *Mechanism of Human Error and Human error Detection*. PhD Dissertation. University of California, San Diego
- Sherman, J., Bisanz, J. (2007). Evidence for Use of Mathematical Inversion By Three Year Old Children. *Journal of Cognition and Development*, 8, 3, 333-344
- Shepard, R. N., (1967). Recognition Memory for Words, Sentences and Pictures. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 6, 156-163
- Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, 171, 701- 703.
- Shepard, R. N., & Cooper, L. A. (1982). *Mental images and their transformations*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Siegler, R. S. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students, and perfectionists. *Child Development*, 59, 833–852
- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75, 428–444

- Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126, 71–92
- Siegler, R. S., Ramani, G. B. (2009). Playing Linear Number Board Games – But Not Circular Ones – Improves Low-Income Preschoolers' Numerical Understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101 (3), 545-560
- Sloman, S. (1993). Feature- based induction. *Cognitive Psychology*, 25, 231- 280
- Sloman, S. (1994). When explanations compete: The role of explanatory coherence on judgments of likelihood. *Cognition*, 52, 1- 21
- Sloman, S. A. (1996). The empirical case for two systems of reasoning. *Psychological Bulletin*, 119 (1), 3-22
- Smith, C. M., Bushouse, E., & Lord, J. (2009). Individual and group performance on insight problems: The effects of experimentally induced fixation. *Group processes & Intergroup Relations*, 13 (1), 90- 99
- Smith, E. E., Shafir, E., Osherson, D. N. (1994). Similarity, plausibility and judgments of probability. *Cognition*, 49, 67- 96
- Sperber, D., Clément, F., Heintz, C., Mascaro O., Mercier, H., Origgi, G., & Wilson, D. (2010). Epistemic Vigilance. *Mind & Language*, 25 (4), 359- 393
- Standing, L. (1973). Learning 10,000 pictures. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 25, 207-222
- Stanovich, K. E. (1999). *Who is rational? Studies of individual differences in reasoning*. Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sternberg, R. J. (1987). *Teorie dell'intelligenza*, Milano, Italy: Bompiani
- Tarr, M. J., & Pinker, S. (1989). Mental rotation and orientation-dependence in shape recognition. *Cognitive Psychology*, 21, 233-282

- Tentori, K., Bonini, N., Osherson, D. (2004). The conjunction fallacy: A misunderstanding about conjunction? *Cognitive Science*, 467- 477
- Thagard, P. (1989). Explanatory coherence. *Behavioral & Brain Sciences*, 12, 435–502
- Toulmin, S. A. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press
- Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2004). Strategy development in children with mathematical disabilities: Insights from the choice/no-choice method and the chronological-age/ability-level-match design. *Journal of Learning Disabilities*, 37, 119–131
- Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2006). The development of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. *Cognition and Instruction*, 24, 439–465
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. In Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A. (Eds.). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: Cambridge University Press
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning : The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90, 293- 315
- Tversky, A., Koehler, D. J. (1994). Support theory: A nonextensional representation of subjective probability. *Psychological Review*, 101, 547- 567
- Tweney, R. D., Doherty, M. E., Worner, W. J., Pliske, D. B., Mynatt, C. R., Gross, K. A., et al. (1980). Strategies of rule discovery in an inference task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 32, 109–123.
- Unal, H., Jakubowski, E., Corey, D. (2009). Differences in learning geometry among high and low spatial ability pre-service mathematics teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40 (8), 997-1012
- Unsworth, N., & Engle R. W. (2007a). The nature of individual differences in working memory capacity: Active maintenance in primary memory and controlled search from secondary memory. *Psychological Review*, 114, 104-132

- Unsworth, N., Spillers, G. J., Brewer, G. A. (2010). The Contributions of Primary and Secondary Memory To Working Memory Capacity: An Individual Differences Analysis of Immediate Free Recall. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 36 (1), 240-247
- Vallée-Tourangeau, F., & Payton, T. (2008). Graphical representation fosters discovery in the 2-4-6 task. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 61 (4), 625-640
- Van Putten, C. M., Van den Brom-Snijders, P. A., & Beishuizen, M. (2005). Progressive mathematization of long division strategies in Dutch primary schools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36,44–73
- Van De Geer, J. P. (1957). *A Psychological Study of Problem Solving*. Harlem: De Toorts
- Van Leeuwen, M., Hoekstra, R. A., van den Berg, S. M., Boomsma, D. I. (2009). The Genetic and Environmental Structure of Verbal and Visuospatial Memory in Young Adults and Children. *Neuropsychology*, 23 (6), 792-802
- Vecchio, L. (1992). Breve storia delle ricerche sull'immagine mentale. In *Le Immagini Mentali* (Atti del convegno), 15-48. Pavia: La Nuova Italia Editrice
- Wason, P. C. (1960). On the failure to eliminate hypotheses in a conceptual task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 12, 129–140
- Vicario, G. B. (1973). Errore dello stimolo e psicologia del tempo. *Archivio di Psicologia, Neurologia, Psichiatria*, 34, 243- 275
- Vicario, G. B. (1998). Un modo per chiudere le discussioni sull'errore dello stimolo e sull'errore dell'esperienza. *Giornale Italiano di Psicologia*, 3, 653- 658
- Vicario, G. B. (1999). Nel corpo della psicologia della Gestalt l'errore dello stimolo e l'errore dell'esperienza sono due commensali non inviatati. In U. Savardi, I. Bianchi (Eds.) (1999). *Gli errori dello stimolo* (pp. 183- 188). Verona: Cierre Edizioni.
- Wason, P. C. (1966) Reasoning. In B. M. Foss (Eds.). *New horizons in psychology* (pp. 106–37). Harmondsworth: Penguin
- Wason, P. C., Evans J. St. B. T. (1975). Dual processes in reasoning? *Cognition*, 3 (2), 141- 154

- Wason, P. C., Brooks, P. J. (1979). THOG: The anatomy of a problem. *Psychological Research*
- Wason, P. C., Johnson Laird, P. N. (1977). *Psicologia del ragionamento*, Firenze: Giunti Editore
- Weaver, J. F. (1973). The symmetric property of the equality relation and young children's ability to solve open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 45–56
- Wechsler, D. (1997). *Wechsler Adult Intelligence Scale – third edition*. San Antonio, TX: The Psychological Corporation
- Wegner, D. M. (2002). *The illusion of conscious will*. Cambridge, MA: MIT Press
- Weller, A., Villejoubert, &, Vallée-Tourangeau, F. (2011). Interactive insight problem solving. *Thinking & Reasoning*, 17 (4), 424-439
- Welsh, J. A., Nix, R. L., Blair, C., Bierman, K. L., Nelson, K. E. (2010). The Development of Cognitive Skills and Gains in Academic School Readiness for Children From Low-Income Families. *Journal of Educational Psychology*, 102 (1), 43-53
- Wertheimer, M. (1912a): Über das Denken der Naturvölker. *Zeitschrift für Psychologie*, 60, 321-378.
- Wertheimer, M. (1912b): Untersuchungen über das Sehen von Bewegung. *Zeitschrift für psychologie*, 61, 161- 265.
- Wertheimer, M. (1923): Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt. II. *Psychologische Forschung*, 4, 301-350.
- Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking*. New York and Evanston: Harper & Row Publishers.  
First appearance Über Schluszbprozesse in productiven Denken, 1919
- Wertheimer, M. (1965). *Il pensiero produttivo*. Firenze: Editrice Universitaria
- Wisniewski, E. J. (1996). Construal and similarity in conceptual combination. *Journal of Memory and Language*, 35, 434- 453

- Woodcock, R.W., & Johnson, M.B. (1989). *Woodcock-Johnson psycho-educational battery-revised*. Allen, TX: DLM.
- Wright, J. C., & Murphy, G. L. (1986). The utility of theories in intuitive statistics: The robustness of theory-based judgments. *Journal of Experimental Psychology: General*, 113, 301–22
- Wu, L., Knoblich, G., Luo, J. (in press). The role of chunk tightness and chunk familiarity in problem solving: Evidence from ERPs and fMRI. *Human Brain Mapping*
- Yorke, M. (2001). Bipolarity... or not? Some conceptual problems relating to bipolar rating scales. *British Educational Research Journal*, 27(2), 171–186.
- Young, S. G., Hugenberg, K. (2010). Mere Social Categorization Modulates Identification of Facial Expression of Emotion. *Journal of Personality and Social Psychology*, 99 (6), 964-977
- Zingales, M. (1974). *L'organizzazione della creatività*. Bologna, Italy: Cappelli
- Zorzi, M., (2002). Brain damage. Neglect disrupts the mental number line. *Nature*, 138-139

## Appendice

Questa è la versione modificata del “Thinking Aloud Coding Scheme”; per la spiegazione vedere il paragrafo 4.2.

|  | <b>Tutto (T)</b><br>Configurazione globale | <b>Parte (P)</b><br>Si prendono in considerazione solo parti, <b>Figure</b> o <b>Elementi</b> del problema | <b>Tutto/Parte (TP)</b><br>La configurazione globale viene messa in relazione con sue parti, <b>Figure</b> o <b>Elementi</b> [es: l' <i>area</i> del parallelogrammo si trova facendo <i>base</i> per <i>altezza</i> ] | <b>Tutto/Tutto (TT)</b><br>La configurazione globale del problema viene messa in relazione con un'altra totalità [es: nel problema del parallelogramma, la figura presentata è simile ad un rettangolo allungato] | <b>Parte/Parte (PP)</b><br>Le parti, intese sia come <b>Figure</b> che come <b>Elementi</b> del problema, vengono messe in relazione tra di loro [es: nel problema della finestra dell'altare i due semicerchi sono uguali al cerchio centrale] |
|--|--|--|--|---|---|
| 1. <b>Obiettivi:</b> che cosa chiede il problema?  |  |  |  |   |   |
| 2. <b>Enunciazione di mezzi/passaggi per raggiungere l'obiettivo</b><br><br>2.1 Ricerca/identificazione di dati/informazioni/strategie necessari per raggiungere la soluzione [es: devo conoscere la misura del diametro e da lì posso ricavare l'area; non ricordandoci la formula, dobbiamo arrivarci col ragionamento]<br><br>2.2 Rilettura del testo<br><br>2.3 Riformulazione (con altre parole) del testo o dell'obiettivo |  |  |  |   |   |

|   |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| <p><b>3. Applicazione di REGOLE</b></p> <p>3.1 Conoscenze, nozioni, informazioni apprese e formule geometriche</p> <p>3.2 Autoistruzioni: regola che il soggetto si dà [es: nel quadrato di Maier, “bisogna rimanere dentro i 9 punti”; “devo creare una figura chiusa”]</p>  |  |  |  |  |  |
| <p><b>4. Applicazione di REGOLE VISIBILI (ciò che SO MA ANCHE VEDO)</b></p> <p>4.1 Ciò che deriva da conoscenze apprese in passato e di cui ho conferma visiva [es. le due diagonali del rettangolo sono uguali; i quattro lati del quadrato sono uguali; non è un parallelogrammo o quadrato perfetto]</p> <p>4.2 Ciò che deriva da conoscenze apprese qui e ora o attraverso l'utilizzo di strumenti [es: righello] o attraverso il testo del problema e di cui ho conferma visiva [es. nel quadrato di Kanizsa, rileggendo il testo del problema, acquisiscono che i 4 triangoli sono uguali, isosceli e rettangoli e sono tutte cose che si vedono]</p> |  |  |  |  |  |
| <p><b>5. Applicazione di DESCRIZIONI O OPERAZIONI VISIVE</b></p> <p>5.1. Descrizione/riconoscimento di ciò che è rappresentato visivamente sul foglio (a. figura originale = quella riportata dal testo del problema; b. figura disegnata dal gruppo/singolo) e di cui si può descrivere anche corrispondenza o no ad una rappresentazione mentale standard della figura.</p>   |  |  |  |  |  |



|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
| 5.2 Operazioni dettate dalla figura [es: dividere il parallelogrammo in triangoli; scomporre la finestra sull'altare in semicerchi e quadrato] ( <b>a.</b> figura originale = quella riportata dal testo del problema; <b>b.</b> figura disegnata dal gruppo/singolo). |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|